Livret pour la Terminale Spécialité de Mathématiques – Rentrée 2021

Sommaire

Ce livret met l'accent sur cinq thèmes fondamentaux pour la spécialité Mathématique de Terminale : second degré, dérivation, suites, fonction exponentielle et géométrie plane (avec les vecteurs et droites du plan). Un autre thème est assez important : les probabilités.

Pour chacun de ces thèmes :
- Connaître le cours (faire des fiches), revoir les exemples et les exercices du cours.
- Refaire les DS, les interrogations et les DM faits pendant l'année et faire **les exercices proposés dans ce document** d'abord sans aucune aide, puis si nécessaire avec l'aide du cours et, en dernier recours, de la correction.

Penser à l'aide qu'apporte la calculatrice : maîtriser la représentation graphique de fonctions, l'utilisation du menu statistiques, le calcul des termes d'une suite... Dès que possible, essayer de vérifier les réponses à l'aide de la calculatrice.

- Il est conseillé de faire une première fois les exercices de ce livret (début juillet), puis de les revoir, s'ils vous ont posé problème, en août.

- Il est conseillé de fractionner le travail (éviter les longues séances de révision : il est préférable de se concentrer par exemple 30 minutes sur un exercice, sans musique ni téléphone à portée de main). Certains de ces exercices sont difficiles, il est normal de ne pas savoir tout faire du premier coup !

- Il vous est conseillé de dédier un cahier à votre travail des vacances, en mathématiques ou dans d'autres matières. Vous pourrez ainsi le présenter à vos professeurs à la rentrée pour qu'ils puissent mesurer vos efforts. Notez aussi vos questions si vous en avez.

Les premiers chapitres de Terminale en spécialité Mathématique concerneront les suites et la dérivation : terminer les révisions par ces notions.
En fin de livret, on trouvera des éléments de correction.

Second degré : rappels de cours

➢ Un trinôme du second degré peut s'écrire sous deux formes :

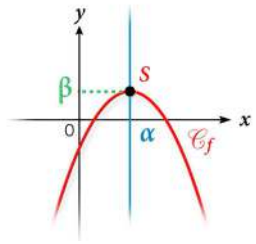
- **forme développée** : $f(x) = ax^2 + bx + c$
- **forme canonique** : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ où α et β sont deux réels.
- **forme factorisée éventuelle :** $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_1 sont les racines éventuelles.

➢ Somme et produit des racines :

Si f admet deux réels x_1 et x_2 pour racines, alors :

- La **somme** des racines est : $\boldsymbol{S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$
- Le **produit** des racines est : $\boldsymbol{P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}}$

➢ Représentation graphique ; variations



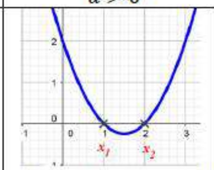
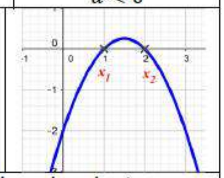
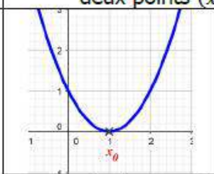
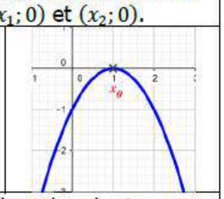
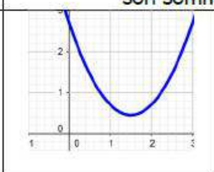
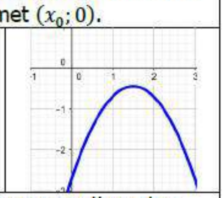
La courbe représentant f est une **parabole** de sommet $S(\alpha\,;\beta)$.
Si $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut. On en déduit les variations de f.
Si $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas. On en déduit les variations de f.
La parabole est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \alpha$.

➢ Équation du second degré

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$) correspondent aux racines de f.

Méthode :

- Toujours essayer de repérer une factorisation (par un facteur commun ou une identité remarquable).
- Repérer une racine « évidente », puis calculer l'autre racine rapidement en utilisant la somme ou le produit des racines.
- Dans le cas où on ne remarque rien de particulier, on calcule le discriminant.

<table>
<tr><th rowspan="2">Signe de $\Delta = b^2 - 4ac$</th><th rowspan="2">Racines de f</th><th rowspan="2">Forme factorisée de f</th><th rowspan="2">Signe de $f(x)$</th><th colspan="2">Courbe représentative de f</th></tr>
<tr><th>$a > 0$</th><th>$a < 0$</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$\Delta > 0$</td><td rowspan="2">$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
et
$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$</td><td rowspan="2">$a(x-x_1)(x-x_2)$</td><td rowspan="2"><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>Signe de $f(x)$</td><td>Signe de a</td><td>0</td><td>Signe de $-a$</td><td>0</td><td>Signe de a</td></tr></table></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">La parabole coupe l'axe des abscisses en deux points $(x_1;0)$ et $(x_2;0)$.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\Delta = 0$</td><td rowspan="2">$x_0 = \frac{-b}{2a}$</td><td rowspan="2">$a(x-x_0)^2$</td><td rowspan="2"><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>Signe de $f(x)$</td><td>Signe de a</td><td>0</td><td>Signe de a</td></tr></table></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">La parabole coupe l'axe des abscisses en son sommet $(x_0;0)$.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\Delta < 0$</td><td rowspan="2">aucune</td><td rowspan="2">Ne se factorise pas</td><td rowspan="2"><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>Signe de $f(x)$</td><td colspan="2">Signe de a</td></tr></table></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">La parabole ne coupe pas l'axe des abscisses.</td></tr>
</table>

Exercices : second degré

Exercice 1

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 - 3x + 4$.

On admet que pour tout réel x on a :

$f(x) = -(x + 1{,}5)^2 + 6{,}25$ et pour tout réel x on a : $f(x) = -(x + 4)(x - 1)$.

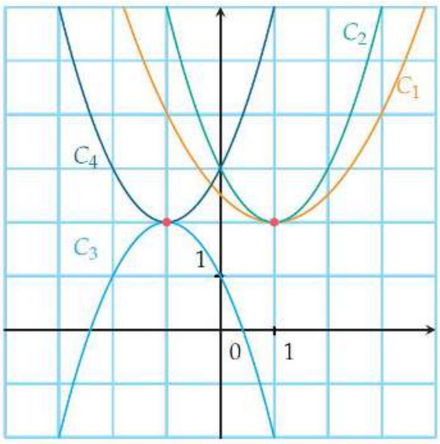
En utilisant la forme la plus adaptée de $f(x)$, répondre aux questions suivantes :

1) Résoudre $f(x) = 0$.
2) Résoudre $f(x) = 6{,}25$.
3) Dresser le tableau de variations de f.

Exercice 2

Associer les courbes C_1, C_2, C_3 et C_4 des fonctions du second degré suivantes à leur forme canonique en justifiant.

1) $f_1(x) = (x - 1)^2 + 2$
2) $f_2(x) = -(x + 1)^2 + 2$
3) $f_3(x) = (x + 1)^2 + 2$
4) $f_4(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2 + 2$



Exercice 3

Résoudre les équations suivantes.

a) $2x^2 + 3x - 5 = 0$
b) $-5x^2 + 7x - 4 = 0$
c) $9x^2 - 18x + 9 = 0$
d) $x^2 + 3x + 2 = 0$

Exercice 4

Déterminer, lorsque cela est possible, une expression factorisée des trinômes de degré 2 suivants :

a) $f(x) = x^2 - 3x - 10$
b) $g(x) = 3x^2 - x + 7$
c) $h(x) = -8x^2 + 40x - 50$

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $x^2 + x - 2 > 0$
b) $-3x^2 + x - 2 \leqslant 0$
c) $2x^2 + 3x \geqslant 0$
d) $2x^2 - 8 < 0$

Problème 1

Une entreprise produit de la pâte à papier.

On note q la masse de pâte produite, exprimée en tonnes, avec $q \in [0; 60]$.

Le coût de production, en euros, pour une quantité produite q est

$C(q) = q^2 + 632q + 1075$.

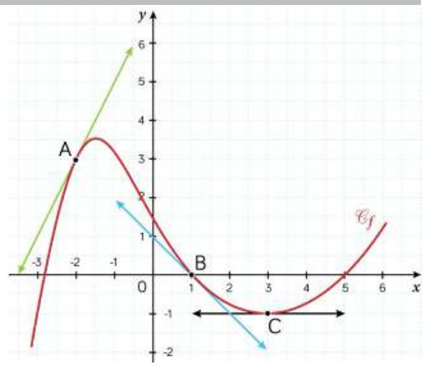
L'entreprise vend toute sa production à un prix à la tonne fixe. L'activité est à l'équilibre pour la production et la vente de 25 tonnes de pâte.

a) Déterminer le prix de vente à la tonne.

b) En déduire l'expression du bénéfice en fonction de q.

c) Dans quel intervalle doit se situer la production pour que l'activité soit rentable ?

Dérivation : rappels de cours



➢ Nombre dérivé et tangente :

Par définition, $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ (si cette limite est un réel)

$f'(a)$ est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe au point d'abscisse a.

On retiendra en particulier « **dérivée nulle : tangente horizontale** ».

Dans l'exemple ci-contre, $f'(3) = 0$, $f'(1) = -1$ et $f'(-2) = 2$.

L'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est :

$$\boldsymbol{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

➢ Dérivées des fonctions usuelles

Fonction usuelle	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
$f(x) = k$, où k est un nombre réel fixé	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}\{0\}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	]-∞ ; 0[∪]0; +∞ [	]-∞ ; 0[et]0; + ∞ [	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	[0 ; + ∞ [	] 0 ; + ∞ [	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

➢ Dérivées et opérations

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et $k \in \mathbb{R}$ alors :

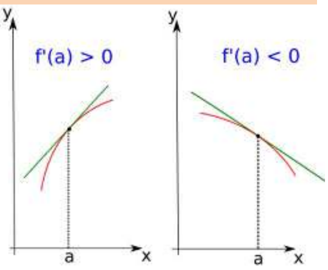
- La fonction $ku : x \mapsto ku(x)$ est dérivable sur I et $(ku)' = \boldsymbol{ku'}$.
- La fonction $u + v : x \mapsto u(x) + v(x)$ est dérivable sur I et $\boldsymbol{(u+v)' = u' + v'}$.
- La fonction $uv : x \mapsto u(x) \times v(x)$ est dérivable sur I et $\boldsymbol{(uv)' = u'v + uv'}$.

Soit u et v des fonctions dérivables sur I, v ne s'annulant pas sur I, alors :

- La fonction $\frac{1}{v} : x \mapsto \frac{1}{v(x)}$ est elle aussi dérivable sur I et on a la formule suivante: $\boldsymbol{\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}}$
- La fonction $\frac{u}{v} : x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$ est elle aussi dérivable sur I et on a la formule suivante: $\boldsymbol{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}}$

Soit m et p deux réels. Soit g une fonction dérivable sur I telle que, pour tout $x \in I$, $mx + p \in I$. La fonction $f : x \mapsto g(mx+p)$ est définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on a : $\boldsymbol{f'(x) = m\,g'(mx+p)}$

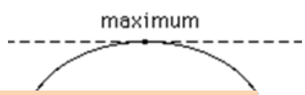
➢ Signe de la dérivée et variations



1) Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.
2) Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.
3) Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Pour déterminer les variations d'une fonction f :

- On calcule la dérivée $f'(x)$;
- On étudie le signe de $f'(x)$;
- On dresse le tableau de variations de f.



➢ Extrema d'une fonction

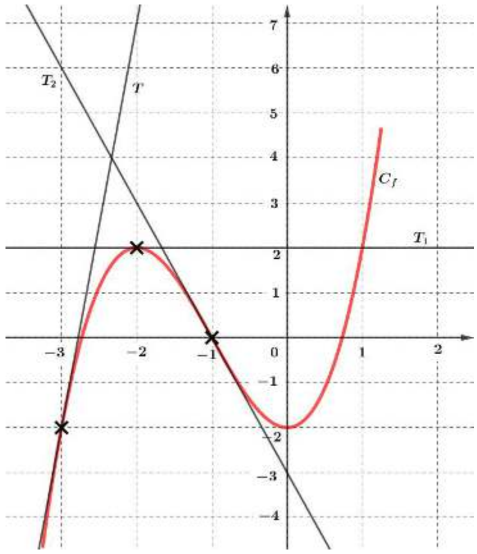
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

Si a est un réel de l'intervalle I mais qui n'est pas une borne de I et si f' s'annule en a en changeant de signe alors f admet localement un extremum en a qui est $f(a)$: on parle d'extremum local.

Exercices : dérivation

Exercice 1

Sur le graphique ci-dessous, C_f est la représentation graphique d'une fonction f dérivable sur $[-3{,}25; 1{,}25]$.
T est sa tangente au point d'abscisse -3 et T_1 sa tangente au point d'abscisse -2 et T_2 sa tangente au point d'abscisse -1.



1) Lire les valeurs de :
- **a.** $f'(-3)$ et $f(-3)$.
- **b.** $f'(-2)$ et $f(-2)$.
- **c.** $f'(-1)$ et $f(-1)$.

2) Donner les équations de T ; T_1 et T_2.

3) Sur quel(s) intervalle(s) le nombre dérivé de la fonction est-il négatif ?

4) Sur quel(s) intervalle(s) le nombre dérivé de la fonction est-il positif ?

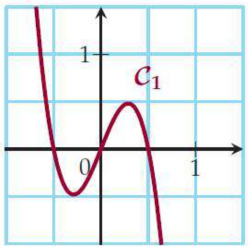
Exercice 2

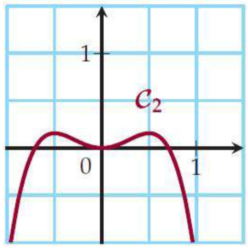
Déterminer, en détaillant vos calculs, la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes.

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 + 3$
2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3(x + 2)$
3) Soit h la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par : $h(x) = \frac{1}{x^4}$
4) Soit l la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par : $i(x) = \frac{x+1}{x^2}$

Exercice 3

Voici deux courbes dont l'une représente une fonction f et l'autre sa dérivée f'.
Quelle est la courbe représentant f et quelle est celle représentant f' ?





Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x^2 - x$

1) Déterminer $f'(x)$.
2) Étudier le signe de $f'(x)$.
3) En déduire le tableau de variations de f.
4) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2.

Exercice 5

Dans chaque cas, déterminer les variations de la fonction f définie par :

1) $f(x) = (x - 1)\sqrt{x}$ pour $x \in]0; +\infty[$.
2) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ pour $x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.
3) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ pour $x \in \mathbb{R}$

Problème 2

Soit C_f la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.
Soit $\mathcal{D}$ la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x - 2$.
Soit h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = f(x) - g(x)$.

1) Déterminer $h'(x)$.
2) Étudier le signe de $h'(x)$.
3) En déduire le tableau de variations de h.

En déduire les positions relatives des courbes C_f et $\mathcal{D}$ sur $[0; +\infty[$.

Suites : rappels de cours

➢ Deux modes de génération d'une suite :

- Formule explicite $\boldsymbol{u_n = f(n)}$ avec n entier naturel.
  exemple : $u_n = n^2 - 3n$ alors $u_7 = 7^2 - 3 \times 7 = 28$
- Par récurrence $\begin{cases} \boldsymbol{u_0 = a} \\ \boldsymbol{u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \geqslant 0} \end{cases}$
  exemple : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \text{ pour tout } n \geqslant 0 \end{cases}$ alors $u_1 = 2 \times 5 - 3 = 7$ $u_2 = 11\ldots$

➢ Sens de variation d'une suite :

La suite (u_n) est **croissante** à partir du rang k lorsque pour tout $n \geqslant k$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
La suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang k lorsque pour tout $n \geqslant k$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
On dit que (u_n) est **monotone** si elle est croissante (ou décroissante) à partir de son 1er terme.
Pour montrer qu'une suite est monotone, **on calcule $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n}$** puis on étudie son signe.

➢ Suites arithmétiques :

$\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$ r est la raison

$\boldsymbol{u_n = u_0 + nr}$ exemple : $u_n = 50 + 3n$ suite arithmétique de raison 3 et de terme initial 50

$\boldsymbol{u_n = u_1 + (n-1)r}$ dans le cas où le premier terme de la suite est u_1

exemple : soit une suite arithmétique de raison 5 telle que $u_1 = 20$. Alors $u_{10} = u_1 + 9r = 65$.

Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique = $\boxed{\dfrac{(\text{nombre de termes}) \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}}$

En particulier, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

➢ Suites géométriques :

$\boldsymbol{u_{n+1} = q \times u_n}$ q est la raison

$\boldsymbol{u_n = u_0 \times q^n}$ exemple : $u_n = 4 \times 1{,}5^n$ suite géométrique de raison 1,5 et de terme initial 4

$\boldsymbol{u_n = u_1 \times q^{n-1}}$ dans le cas où le premier terme est u_1

Pour montrer qu'une suite est géométrique, **on calcule $\boldsymbol{u_{n+1}}$** et on montre que $u_{n+1} = q \times u_n$.

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique : $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} u_i = \boxed{\text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}}$

En particulier, $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

➢ Comportement à l'infini : suite convergente, suite divergente

(u_n) **converge vers $\boldsymbol{\ell}$** lorsque ses termes se rapprochent de plus en plus de ℓ lorsque n devient très grand.
(u_n) **diverge** lorsqu'elle ne converge pas (soit elle n'a pas de limite, soit elle tend vers $+\infty$ ou $-\infty$).

Exercices : suite

Exercice 1
(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$. Calculer u_5.

Exercice 2
(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = (n+5)^2 + 2$.
1) Calculer les trois premiers termes de la suite.
2) Exprimer u_{n+1} en fonction de n.
3) Établir le sens de variation de la suite (u_n) en étudiant le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

Exercice 3
(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 4 \end{cases}$. Calculer u_1, u_2 et u_3.

Exercice 4
(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + 1 \end{cases}$. Calculer u_1, u_2 et u_3.

Exercice 5
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $u_0 = 16$.
1) Exprimer u_n en fonction de n.
2) Calculer u_6.

Exercice 6
(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = n^2 + 4n$. Cette suite est-elle arithmétique ?

Exercice 7
(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = 4n + 7$. Cette suite est-elle arithmétique ?

Exercice 8
Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_5 = 9$ et $u_{20} = 28$.
1) Calculer la raison de cette suite.
2) Quel est le sens de variation de cette suite ?
3) Calculer u_{50}.

Exercice 9
Soit (u_n) une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 2$.
1) Exprimer u_n en fonction de n.
2) Calculer u_3.

Exercice 10
Soit (u_n) une suite géométrique de raison positive telle que $u_0 = 7$ et $u_2 = 28$.
Déterminer la raison de cette suite, puis calculer u_5.

Exercice 11
Les premiers termes d'une suite sont : $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_2 = 3$.
Cette suite peut-elle être géométrique ?

Exercice 12
Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_1 = 480$ et de raison $\frac{1}{2}$.
1) Calculer v_2, v_3 et v_4.
2) Pour tout entier naturel n, donner l'expression de v_n en fonction de n.
3) Étudier le sens de variation de la suite (v_n).

Problème 3
Un commercial très compétent, arrive à vendre chaque mois 15 Smartphones de plus que le mois précédent. Il a commencé son travail en décembre 2015, avec 20 ventes réussies.
Soit la suite (v_n) telle que v_n représente le nombre de Smartphones vendus le mois n de l'année 2016.
On définit $v_0 = 20$.
1) Calculer v_1, v_2 et v_3.
2) Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Justifier correctement votre réponse.
3) Exprimer v_n en fonction de n et de v_0.
4) A partir de quel mois vend-il plus de 200 Smartphones par mois ?

Problème 4
Un propriétaire propose à partir du 1er janvier 2015 un appartement dont le montant annuel initial du loyer est 4 500 €. Ce propriétaire augmente le loyer annuel chaque année de 3%.
On désigne par Q_n le montant annuel du loyer pour l'année (2015+n) ; on a donc Q_0 = 4 500.
a) Calculer Q_1 et Q_2.
b) Donner la nature de la suite (Q_n) ainsi que ses éléments caractéristiques.
c) Exprimer Q_n en fonction de n.
d) En quelle année le loyer dépassera-t-il le double du loyer initial ? (à l'aide de la calculatrice).

Fonction exponentielle rappels de cours

- Définition

L'unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que $f' = f$ et $f(0) = 1$ est appelée **fonction exponentielle**. On la note **exp :** $\boldsymbol{x \mapsto \exp(x)}$

$\boldsymbol{\exp(1) = e}$. Une valeur approchée de ce nombre est **2,718.**

Pour tous les nombres réels x on note $\boldsymbol{\exp(x) = e^x}$**.**

- Propriétés algébriques

Pour tous les réels x et y et pour tout entier relatif n :

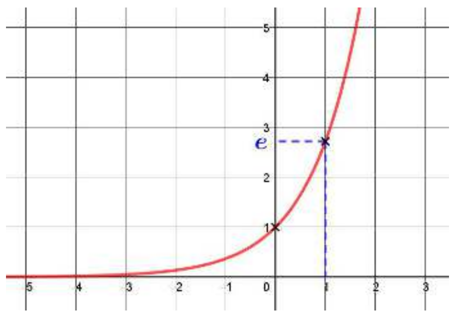
$\boldsymbol{e^{x+y} = e^x \times e^y}$ $\boldsymbol{e^x > 0}$ $\boldsymbol{e^{-x} = \frac{1}{e^x}}$ $\boldsymbol{e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}}$ $\boldsymbol{(e^x)^n = e^{nx}}$

Pour tous les réels a, la suite (e^{na}) est une suite géométrique de raison $\boldsymbol{e^a}$.

- Étude de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Variation de **exp**		**1**	$\boldsymbol{e}$	



- Équations et inéquations

Pour tous réels x et y :

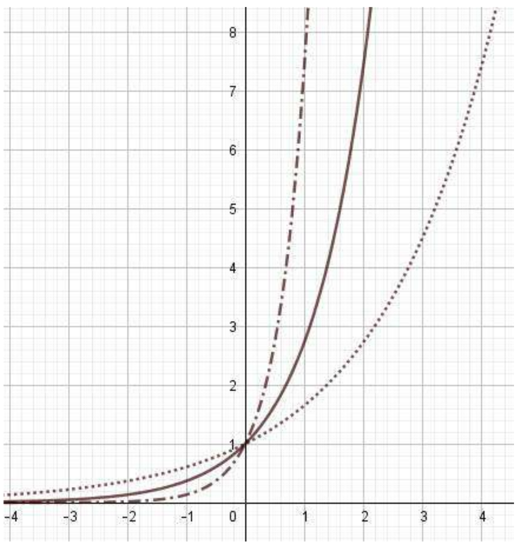
$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ en particulier $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$ en particulier $e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

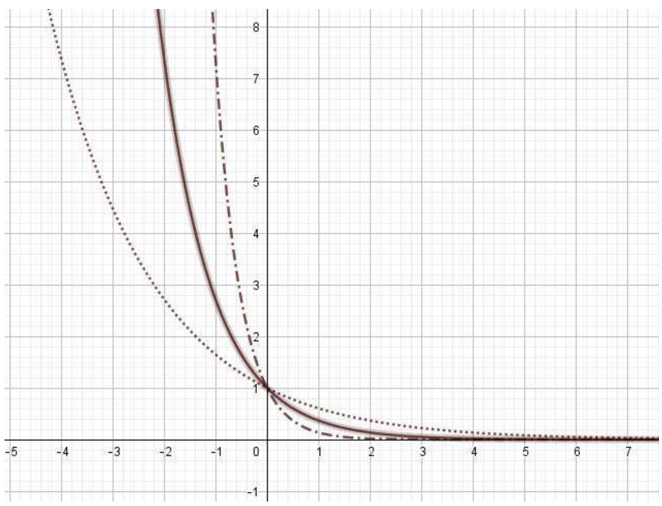
- **Fonction** $\boldsymbol{x \mapsto \exp(ax + b)}$

Soient a et b sont des nombres réels, la fonction $g : x \mapsto \exp(ax + b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel x, $\boldsymbol{g'(x) = a\exp(ax + b)}$

Pour tout x réel, $g(x) = e^{kx}$, avec k réel strictement positif.



Pour tout x réel, $h(x) = e^{-kx}$, avec k réel strictement positif.



Exercices : fonction exponentielle

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes, où x désigne un nombre réel.

a) $e^x \times e^{3x-1}$
b) $\frac{e^{-x}}{e^{4-x}}$
c) $(e^{5x})^3$
d) $(e^x - 1)(e^x + 1)$
e) $\frac{e^{-x} \times e^{9x}}{e^{3x}}$
f) $e^x \times e^{5x-2} \times e$
g) $\frac{e^{-x}}{e^{7-x}} \times e^x$
h) $\frac{e^{x+4}}{(e^{3x})^2}$

Exercice 2

Pour chacune des suites ci-dessous dont on donne le terme général, montrer qu'il s'agit d'une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

a) (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = e^{-7n}$.
b) (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{e^{-2n} \times e^{7n}}{e^{3n}}$.
c) (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = (e^{-4n})^{-2}$.

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes :

a) $e^{3x-7} = -2$
b) $(e^x)^2 - 1 = 0$
c) $e^{-3x+8} = e^{-5}$
d) $e^{x^2} - e = 0$

Exercice 4

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $e^x > e$
2) $e^{-3x+1} \geqslant e^4$
3) $e^{7x-21} < 1$
4) $e^{-2x+5} - e^{8x-3} \leqslant 0$
5) $e^x \leqslant 0$

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction.

a) $f : x \mapsto e^{4x+1} - 4x + 7$
b) $g : x \mapsto xe^{5x}$
c) $h : x \mapsto \frac{1}{e^x+1}$
d) $k : x \mapsto \frac{e^x+1}{e^x+3}$

Géométrie repérée : vecteurs et droites du plan - rappels de cours

Rappels : vecteurs colinéaires :
Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** lorsqu'il existe un nombre réel k tel que $\boldsymbol{\vec{v} = k\vec{u}}$.

Caractérisation de la colinéarité
Dans un repère du plan, les vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles, c'est à dire, si et seulement si leur déterminant est nul.
$\mathbf{det}(\vec{u},\vec{v}) = xy' - yx' = 0$.

Rappels : vecteurs orthogonaux :
Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** s'ils ont des directions perpendiculaires.

Caractérisation de l'orthogonalité
Dans un repère du plan, les vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul, c'est-à-dire : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' = 0$.

Rappels : vecteur directeur et vecteur normal d'une droite :
Soit d une droite et A et B deux points de la droite d.
Un vecteur directeur de la droite d est un vecteur $\vec{u}$, non nul, colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Un vecteur normal de la droite d est un vecteur $\vec{n}$, non nul, orthogonal à un vecteur directeur de d.

Rappels : équation cartésienne d'une droite :
L'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ avec a, b, c des réels et $(a;b) \neq (0;0)$ est **une droite (d) de vecteur directeur $\vec{u}\binom{-b}{a}$ et de vecteur normal $\vec{n}\binom{a}{b}$**.

Une équation d'une droite (d) de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a;b) \neq (0;0)$ est appelée une **équation cartésienne** de la droite (d).

Rappels : équation réduite d'une droite :

- Toute droite du plan **non parallèle à l'axe des ordonnées** admet **une équation réduite** de la forme $\boldsymbol{y = mx + p}$, où m et p sont des réels.
  Un vecteur directeur de cette droite est $\vec{u}\binom{1}{m}$, où **m est le coefficient directeur (ou pente)** de la droite et **p est l'ordonnée à l'origine**.

Dans ce cas, le coefficient directeur (ou pente) de la droite (d) passant par les points A et B distincts est :
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

- Toute droite du plan **parallèle à l'axe des ordonnées** admet **une équation réduite** de la forme $\boldsymbol{x = k}$, où k est un réel.
  Cette droite admet $\vec{v}\binom{0}{1}$ comme vecteur directeur ; elle n'a ni pente, ni ordonnée à l'origine.

Rappels : équation cartésienne d'un cercle :
Soit $A(x_A\,;y_A)$ un point du plan de R un réel strictement positif.
L'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan tels que $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$ est le cercle C de centre A et de rayon R.

L'équation $\boldsymbol{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2}$ est une équation cartésienne du cercle C.

Exercices : Géométrie repérée, vecteurs et droites du plan

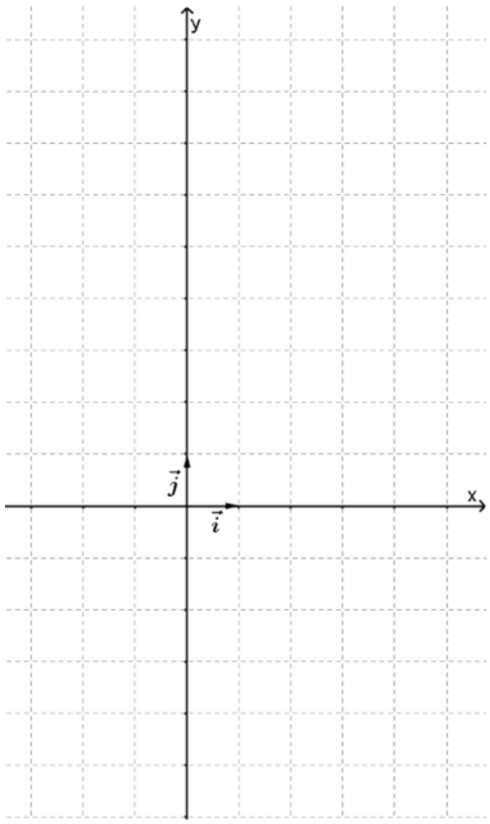
Exercice 1

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\ -\frac{5}{9}\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\binom{-2}{3}$.

1. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?
2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 2

1. Soit la droite D passant par le point $\boldsymbol{A(1\ ;\ 4)}$ et de vecteur directeur $\vec{\boldsymbol{u}}\binom{\boldsymbol{-2}}{\boldsymbol{5}}$. Quelle est son équation cartésienne ?
2. Soit la droite Δ passant par le point $\boldsymbol{B(1\ ;\ -4)}$ et de vecteur normal $\vec{\boldsymbol{n}}\binom{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{5}}$. Quelle est son équation cartésienne ?
3. Tracer les droites $\boldsymbol{D}$ et Δ dans le repère ci-dessous. Placer aussi les points $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ ainsi qu'un représentant des vecteurs $\vec{\boldsymbol{u}}$ et $\vec{\boldsymbol{n}}$.



Exercice 3

1. Déterminer un vecteur directeur $\vec{\boldsymbol{u}}$ et un vecteur normal $\vec{\boldsymbol{v}}$ de la droite $\boldsymbol{d}$ dont une équation cartésienne est $\boldsymbol{-3x + 2y + 1 = 0}$
2. Quelle est l'équation réduite de cette droite ?
3. Le point $\boldsymbol{A(5\ ;-7)}$ appartient-il à $\boldsymbol{d}$? Justifier.
4. Déterminer les coordonnées du point $\boldsymbol{E}$, intersection de $\boldsymbol{d}$ et de l'axe des abscisses.
5. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\boldsymbol{d}'$, perpendiculaire à $\boldsymbol{d}$ et passant par $\boldsymbol{A}$.

Exercice 4

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$), on donne les points $A(-3\ ;\ 1)$ et B(2 ; -2) ainsi que la droite d d'équation cartésienne
$3x - 4y - 5 = 0$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
2. Justifier que les droites d et (AB) sont sécantes puis donner les coordonnées de leur point d'intersection.
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ parallèle à la droite d et passant par $C(-1\ ;\ -3)$.

Exercice 5

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $K(3;-1)$ et de rayon 5.

1. Déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$.
2. Parmi les points ci-dessous, lesquels appartiennent au cercle $\mathscr{C}$:
   $M(-1;2)$; $N\left(\frac{8}{5};-\frac{29}{5}\right)$; $P\left(\frac{9}{5};\frac{2}{5}\right)$

Problème 5

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les trois points : $A(-3;2)$; $B(3;5)$; $C(2;2)$

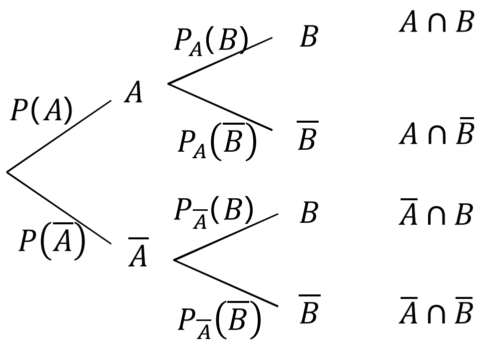
1. Déterminer les coordonnées du pied H de la hauteur du triangle ABC issue du sommet C.
2. Déterminer l'aire du triangle ABC.

Probabilités : rappels de cours

On considère une loi de probabilité P définie sur un univers Ω.

- <u>Probabilités conditionnelles</u>
  A et B sont deux événements avec $P(A) \neq 0$.
  - La probabilité de B sachant A est : $\boldsymbol{P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}}$
  - $\boldsymbol{P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)}$ et $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)}$

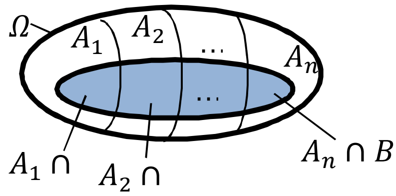
- <u>Représentation à l'aide d'un arbre ou d'un tableau</u>



	B	$\overline{B}$	Total
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
Total	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

1) la somme des probabilités des branches issues d'un même événement est toujours égale à 1.
2) la probabilité de $A \cap B$ est obtenue en multipliant les probabilités le long des branches aboutissant à B et passant par A.

- <u>Formule des probabilités totales</u>
  Si $A_1, A_2, \ldots A_n$ constitue **une partition de l'univers $\boldsymbol{\Omega}$** et $P(A_i) \neq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, alors, pour tout événement B, on a:
  $\boldsymbol{P(B) = P(A_1 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)}$
  $\boldsymbol{= P(A_1) \times P_{A_1}(B) + \ldots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)}$



- <u>Indépendance de deux événements</u>
  - On dit que les événements A et B sont **indépendants** si : $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$.
  - Si $P(A) \neq 0$, on a : A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

- <u>Variable aléatoire</u>
  - <u>Définition</u> : Soit une expérience aléatoire dont l'univers est l'ensemble fini Ω.
    Une **variable aléatoire**, notée $\boldsymbol{X}$, est une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui à chaque issue de Ω, associe un nombre réel.
  - Soit une expérience aléatoire dont l'univers est l'ensemble fini Ω.
    Soit X une variable aléatoire discrète définie sur Ω et prenant les valeurs $\{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$.
    On définit **la loi de probabilité** de X quand à chaque valeur x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, on associe la probabilité de l'événement $\{X = x_i\}$.
    On peut donc établir le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	…	$P(X = x_n)$

  - L'**espérance** de la variable aléatoire X, notée $\boldsymbol{E(X)}$, est le nombre réel défini par :

$$\boldsymbol{E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i}$$

  - La **variance** de la variable aléatoire X, notée $\boldsymbol{V(X)}$, est le nombre réel défini par :

$$\boldsymbol{V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \cdots + p_n(x_n - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2}$$

  - L'**écart-type** de la variable aléatoire X, notée $\boldsymbol{\sigma(X)}$, est le nombre réel défini par :

$$\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$$

Exercices : probabilités

Exercice 1

Une association sportive organise une grande loterie. Les 2 000 billets vendus sont numérotés de 1 à 2 000.
Parmi tous ces billets :

- Un billet rapporte un lot de 1 200 € (*c'est le plus gros lot*);
- Quatre billets rapportent chacun un lot de 200 €.
- Dix billets rapportent chacun un lot de 50 €.
- Tous les autres billets ne rapportent rien.

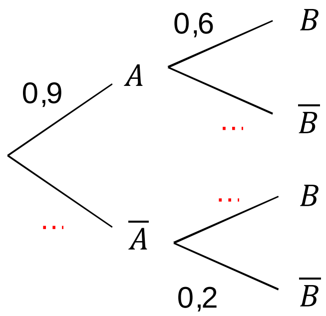
Le prix du billet est fixé à 2 €. Les billets achetés sont choisis au hasard.
X est la variable aléatoire qui donne le gain algébrique de l'acheteur d'un billet.

1) Donner la loi de probabilité de X ?
2) Déterminer l'espérance $E(X)$, arrondie au centième, puis interpréter la valeur obtenue.
3) Au lieu de rapporter 1 200 €, combien doit rapporter le plus gros lot afin que le jeu soit équitable ?

Exercice 2

On considère l'arbre pondéré ci-contre.
Le compléter puis calculer :

1) $P(A \cap B)$.
2) $P(B)$.
3) $P(A \cup B)$.
4) $P_B(A)$. On arrondira à 10^{-2}.



Exercice 3

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35% des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25% de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.
Le livraison de l'horticulteur H_1comporte 80% de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50% et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30%.

Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.
On envisage les événements suivants :

H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »,
H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »,
H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,
C : « l'arbre choisi est un conifère »
F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

a. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
b. Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.
c. Justifier que la probabilité de l'événement C est égale à $0{,}525$.
d. L'arbre choisi est un conifère. Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ?
On arrondira à 10^{-3}.

Éléments de correction

Exercices : second degré

Exercice 1

1) $f(x) = 0 \Leftrightarrow -(x+4)(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x+4 = 0 \; ou \; x-1 = 0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -4 \; ou \; x = 1 \Leftrightarrow S = \{-4; 1\}$

2) $f(x) = 6{,}25 \Leftrightarrow -(x+1{,}5)^2 + 6{,}25 = 6{,}25 \Leftrightarrow -(x+1{,}5)^2 = 0 \Leftrightarrow (x+1{,}5)^2 = 0 \Leftrightarrow x+1{,}5 = 0$

$f(x) = 6{,}25 \Leftrightarrow x = -1{,}5 \Leftrightarrow S = \{-1{,}5\}$

3) f est une fonction polynôme de degré 2 telle que : $f(x) = -(x+1{,}5)^2 + 6{,}25$ avec $a = -1$; $\alpha = -1{,}5$ et $\beta = 6{,}25$.

Comme $a = -1 < 0$, f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\,-1{,}5]$ et strictement décroissante sur $[-1{,}5\,;\,+\infty[$.
f admet un maximum $\beta = 6{,}25$ atteint en $x = -1{,}5$.
On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$-1{,}5$	$+\infty$
Variations de f	↗	6,25	↘

Exercice 2

Dans chaque cas, on a l'écriture $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.
° On regarde si la parabole est tournée vers le haut ($a > 0$) ou vers le bas ($a < 0$). C_3 est la seule tournée vers le bas et f_2 a pour coefficient a le nombre -1. Donc **C_3 représente f_2.**
° Le sommet de la parabole est $S(\alpha\,;\,\beta)$. Pour f_3, on obtient $S_3(-1\,;\,2)$. C'est donc **C_4 qui représente f_3.**
° Pour les deux paraboles restantes, le sommet est le même (de coordonnées $(-1\,;\,2)$) ; il faut donc les distinguer autrement, par exemple en calculant $f(0)$: $f_1(0) = 3$. C'est donc **C_2 qui représente f_1.** On en déduit que **C_1 représente f_4.**

Remarque : il y a d'autres façons de faire ; on peut, par exemple, calculer l'image de 0,5 par chacune des fonctions et regarder quelle courbe passe par le point de coordonnées $(0{,}5\,;\,f(0{,}5))$

Exercice 3

a) $2x^2 + 3x - 5 = 0$

$\boldsymbol{2x^2 + 3x - 5}$ est un trinôme et $\mathbf{1}$ en est une solution évidente donc il admet une deuxième racine (éventuellement égale à la première).

En utilisant le produit des racines, $P = 1 \times x_2 = x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-5}{2} = -2{,}5$, donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $S = \{-2{,}5; 1\}$.

Ou méthode avec le discriminant : $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 9 + 40 = 49$.

$\Delta > 0$ l'équation admet 2 solutions réelles distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{49}}{2\times 2} = \frac{-3-7}{4} = -\frac{10}{4} = -2{,}5$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{49}}{2\times 2} = \frac{-3+7}{4} = \frac{4}{4} = 1$ $\quad S = \{-2{,}5\,;1\}$.

b) $-5x^2 + 7x - 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times (-5) \times (-4) = 49 - 80 = -31$.

$\Delta < 0$ l'équation n'admet aucune solution réelle $S = \emptyset$.

c) $9x^2 - 18x + 9 = 0 \Leftrightarrow (3x)^2 - 2 \times 3x \times 3 + 3^2 = 0 \Leftrightarrow (3x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{3} = 1$

Ou méthode avec le discriminant : $\Delta = (-18)^2 - 4 \times 9 \times 9 = 324 - 324 = 0$

$\Delta = 0$ alors l'équation admet une unique solution réelle : $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{18}{2\times 9} = \frac{18}{18} = 1$. $\quad S = \{1\}$.

d) $x^2 + 3x + 2 = 0$

$\boldsymbol{x^2 + 3x + 2}$ est un trinôme et $\boldsymbol{-1}$ en est une solution évidente donc il admet une deuxième racine (éventuellement égale à la première).

En utilisant le produit des racines, $P = -1 \times x_2 \Leftrightarrow -x_2 = \frac{c}{a} \Leftrightarrow x_2 = -\frac{2}{1} = -2$, donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $S = \{-2; -1\}$.

Ou méthode avec le discriminant : $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$

$\Delta > 0$ l'équation admet 2 solutions réelles distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{1}}{2\times 1} = \frac{-3-1}{2} = -\frac{4}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{1}}{2\times 1} = \frac{-3+1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$ $\quad S = \{-2; -1\}$.

Exercice 4

a) $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-10) = 9 + 40 = 49$.

$\Delta > 0$ $f(x)$ est factorisable et s'écrit : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-\sqrt{49}}{2\times 1} = \frac{3-7}{2} = -\frac{4}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+\sqrt{49}}{2\times 1} = \frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5$

Donc $f(x) = (x + 2)(x - 5)$.

b) $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times 7 = 1 - 84 = -83$. $\Delta < 0$, $g(x)$ ne se factorise pas.

c) $\Delta = 40^2 - 4 \times (-8) \times (-50) = 1600 - 1600 = 0$

$\Delta = 0$, $h(x)$ est factorisable et s'écrit : $h(x) = a(x - x_0)^2$ avec $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-40}{2\times(-8)} = \frac{-40}{-16} = 2{,}5$.

Donc $h(x) = -8(x - 2{,}5)^2$

Exercice 5

<u>Méthode</u> : On calcule Δ, on cherche les racines éventuelles, on fait le tableau de signes et on lit les solutions de l'inéquation dans le tableau.

1) $\Delta = 9$; $x_1 = -2$ et $x_2 = 1$; signe de a « à l'extérieur des racines » ($a = 1$) ;
$s_1 =]-\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[$

2) $\Delta = -23$; le trinôme n'a pas de racine; il a le signe de a pour tout réel x.
$a = -3$, donc, pour tout x, $-3x^2 + x - 2 \leq 0$. $s_2 =]-\infty ; +\infty[$

3) Par factorisation (ou calcul de Δ) : $x_1 = 0$ et $x_2 = -\frac{3}{2}$;

signe de a « à l'extérieur des racines » ($a = 2$) ; $s_3 =]-\infty ; -\frac{3}{2}] \cup [0 ; +\infty[$

4) $2x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 2$. signe de a « à l'extérieur des racines » ($a = 2$) ;
$s_4 =]-2 ; 2[$

Problème 1

a) « L'entreprise vend toute sa production à un prix à la tonne fixe. L'activité est à l'équilibre pour la production et la vente de 25 tonnes de pâte. »

Donc le prix de vente à la tonne est donné par :

$\frac{C(25)}{25} = \frac{25^2+632\times 25+1075}{25} = \frac{625+15\,800+1\,075}{25} = \frac{17\,500}{25} = 700$ Le prix de vente à la tonne est 700 €.

b) Soit $B(q)$ l'expression du bénéfice en fonction de q, avec $q \in [0; 60]$.

$B(q) = R(q) - C(q) = 700q - (q^2 + 632q + 1075) = 700q - q^2 - 632q - 1075$

$B(q) = -q^2 + 68q - 1075$

c) Répondre à cette question revient à résoudre l'inéquation $B(q) > 0$ c'est-à-dire
$-q^2 + 68q - 1075 > 0$.

$\Delta = 68^2 - 4 \times (-1) \times (-1075) = 324$, $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines réelles :

$q_1 = \frac{-68-\sqrt{324}}{2\times(-1)} = \frac{-68-18}{-2} = \frac{86}{2} = 43$ et $q_2 = \frac{-68+\sqrt{324}}{2\times(-1)} = \frac{-68+18}{-2} = \frac{50}{2} = 25$.

B admet le tableau de signes suivant :

q	0		25		43		60
Signe de $B(q)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, les solutions de l'inéquation $-q^2 + 68q - 1075 > 0$ sont : $S =]25; 43[$

Pour que l'activité soit rentable, la production doit se situer dans l'intervalle $]25; 43[$.

Exercices : dérivation

Exercice 1

1) **a.** $f'(-3) = 9$ et $f(-3) = -2$.
b. $f'(-2) = 0$ et $f(-2) = 2$.
c. $f'(-1) = -3$ et $f(-1) = 0$.

2) L'équation réduite de la tangente T à C_f au point d'abscisse -3 est :
$y = f'(-3)\big(x-(-3)\big) + f(-3) = 9\,(x+3) - 2 = 9\,x + 27\ - 2 = 9\,x + 25$

L'équation réduite de la tangente T_1 à C_f au point d'abscisse -2 est :
$y = f'(-2)\big(x-(-2)\big) + f(-2) = 0\,(x+2) + 2 = 2$

L'équation réduite de la tangente T_2 à C_f au point d'abscisse -1 est :
$y = f'(-1)\big(x-(-1)\big) + f(-1) = -3\,(x+1) + 0 = -3x - 3$

3) Le nombre dérivé est négatif sur $]-2\,;0[$ (car *f* décroît sur cet intervalle)

4) Le nombre dérivé est positif sur $]-\infty\,;-2[$ et sur $]0;+\infty[$ (car *f* est croissante sur ces intervalles)

Exercice 2

1) $f'(x) = 4x$
2) $g'(x) = 4x^3 + 6x^2$
3) $h'(x) = -\frac{4}{x^5}$
4) $i'(x) = \frac{-x^2-2x}{x^4} = \frac{-x-2}{x^3}$

Exercice 3

On utilise le théorème du cours liant le signe de la dérivée et les variations de la fonction.
° C_1 est au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $]-\infty\,;-0{,}5]$ et sur [0 ;0,5] donc f_1 est positive sur ces intervalles ; d'autre part f_2 est croissante sur ces intervalles.
° C_1 est au-dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle [–0,5 ; 0] et sur $[0{,}5\,;+\infty[$ donc f_1 est négative sur ces intervalles ; d'autre part f_2 est décroissante sur ces intervalles.
On peut donc en conclure que C_2 représente *f* et C_1 représente *f* '.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = x^3 + x^2 - x$

1) $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$.

2)

$\Delta = 16$ donc $\Delta > 0$ et il y a deux racines : $x_1 = -1$ et $x_2 = \frac{1}{3}$

Le trinôme $3x^2 + 2x - 1$ a le signe de a ($a = 3$) « à l'extérieur des racines ».

3)

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		+	0	–	0	+	
variations de f		↗	1	↘	$-\frac{5}{27}$	↗	

4) $f(2) = 2^3 + 2^2 - 2 = 8 + 4 - 2 = 10$ et $f'(2) = 3 \times 2^2 + 2 \times 2 - 1 = 12 + 4 - 1 = 15$
L'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse 2 est :
$y = f'(2)(x-2) + f(2) = 15\,(x-2) + 10 = 15x - 30 + 10 = 15x - 20$

Exercice 5

1) $f'(x) = \dfrac{3x-1}{2\sqrt{x}}$ ….. f est décroissante sur $]0\,;\,\frac{1}{3}]$ et croissante sur $[\frac{1}{3}\,;\,+\infty[$

2) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}$ ….. f est décroissante sur $[-1;\,0[$ et sur $]0\,;\,1]$ et f est croissante sur $]-\infty;\,-1]$ et sur $[1\,;\,+\infty[$

3) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$ ….. f est croissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$

Problème 2

1) $h'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) = 3(x-1)(x+1)$

2) et 3)

$h'(x)$ s'annule pour :$3(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = ou\ x + 1 = 0$

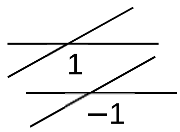
$\Leftrightarrow x = 1 \quad ou \quad x = -1$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de h		$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	

$m > 0$ donc

$m > 0$ donc



Pour tout $x \in [0;1[$: $h(x) = f(x) - g(x) > 0$, donc $f(x) > g(x)$ et C_f est au-dessus de $\mathcal{D}$.
Pour tout $x \in]1;+\infty[$: $h(x) = f(x) - g(x) > 0$, donc $f(x) > g(x)$ et C_f est au-dessus de $\mathcal{D}$.
Pour $x = 1$: $h(x) = f(x) - g(x) = 0$, donc C_f et $\mathcal{D}$ sont sécantes au point d'abscisse 1.

Exercices : suite

Exercice 1 $u_5 = \frac{2\times 5+1}{5+1} = \frac{11}{6}$

Exercice 2

1) $u_0 = (0+5)^2 + 2 = 27$ $u_1 = (1+5)^2 + 2 = 38$ $u_2 = (2+5)^2 + 2 = 51$
1) $u_{n+1} = \left((n+1)+5\right)^2 + 2 = (n+6)^2 + 2 = n^2 + 12n + 36 + 2 = n^2 + 12n + 38$
2) $u_{n+1} - u_n = n^2 + 12n + 38 - (n+5)^2 - 2 = n^2 + 12n + 38 - (n^2 + 10n + 25) - 2$
   $u_{n+1} - u_n = n^2 + 12n + 38 - n^2 - 10n - 25 - 2 = 2n + 11$

   Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 2n + 11$
   Ainsi, pour entier naturel n, $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.

Exercice 3

$u_1 = 2 \times u_0 - 4 = 2 \times 3 - 4 = 6 - 4 = 2$
$u_2 = 2 \times u_1 - 4 = 2 \times 2 - 4 = 4 - 4 = 0$
$u_3 = 2 \times u_2 - 4 = 2 \times 0 - 4 = -4$

Exercice 4

$u_1 = \frac{4}{3}$; $u_2 = \frac{7}{4}$; $u_3 = \frac{11}{7}$

Exercice 5

1) Pour tout $\in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr = 16 + 4n$.
2) $u_6 = 16 + 4 \times 6 = 16 + 24 = 40$.

Exercice 6

On calcule les trois premiers termes, par exemple :
$u_0 = 0$ $u_1 = 1^2 + 4 \times 1 = 1 + 4 = 5$ $u_2 = 2^2 + 4 \times 2 = 4 + 8 = 12$
Calculons les différences :
$u_1 - u_0 = 5 - 0 = 5$ $u_2 - u_1 = 12 - 5 = 7$ donc $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$
Ainsi, la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

Exercice 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 4(n+1) + 7 - (4n + 7) = 4n + 4 + 7 - 4n - 7 = 4$
Donc la suite (u_n) est arithmétique de raison 4 et de premier terme $u_0 = 4 \times 0 + 7 = 7$.

Exercice 8

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_5 = 9$ et $u_{20} = 28$.
1) Pour tout $\in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

$u_5 = 9 \Leftrightarrow u_0 + 5r = 9 \Leftrightarrow u_0 = 9 - 5r$

$u_{20} = 28 \Leftrightarrow u_0 + 20r = 28 \Leftrightarrow u_0 = 28 - 20r$

Ainsi, $9 - 5r = 28 - 20r \Leftrightarrow -5r + 20r = 28 - 9 \Leftrightarrow 15r = 19 \Leftrightarrow r = \frac{19}{15}$

2) (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = \frac{19}{15} > 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

3) *Méthode 1* : Pour tout $\in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

$u_5 = 9 \Leftrightarrow u_0 + 5r = 9 \Leftrightarrow u_0 = 9 - 5r = 9 - 5 \times \frac{19}{15} = 9 - \frac{19}{3} = \frac{8}{3}$

Donc $u_{50} = \frac{8}{3} + 50 \times \frac{19}{15} = 66$.

Méthode 2 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$: $u_n = u_p + (n-p)r$

$u_{50} = u_5 + (50 - 5)\frac{19}{15} = 9 + 45 \times \frac{19}{15} = 66$

Exercice 9

1) Pour tout $\in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n = 2 \times 3^n$
2) $u_3 = u_0 q^3 = 2 \times 3^3 = 54$.

Exercice 10

Soit (u_n) une suite géométrique de raison positive telle que $u_0 = 7$ et $u_2 = 28$.
Déterminer la raison de cette suite, puis calculer u_5.
Pour tout $\in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n = 7 \times q^n$

$u_2 = 28 \Leftrightarrow 7 \times q^2 = 28 \Leftrightarrow q^2 = \frac{28}{7} = 4$

Comme q est positif on en déduit que $q = \sqrt{4} = 2$

$u_5 = 7 \times 2^5 = 224$

Exercice 11

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{2}{1} = 2$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ donc $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$. Ainsi, la suite (u_n) n'est pas géométrique.

Exercice 12

1) $v_2 = v_1 \times q = 480 \times \frac{1}{2} = 240$; $v_3 = 120$; $v_4 = 60$.

2) Pour tout entier naturel n, $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

3) $v_{n+1} - v_n = 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)-1} - 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n} - 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$= 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -240 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

$-240 < 0$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > 0$ (car $\frac{1}{2} > 0$ et ses puissances aussi).

Donc, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n < 0$ et la suite est décroissante.

Problème 3

1)
$v_1 = v_0 + 15 = 20 + 15 = 35$; $v_2 = v_1 + 15 = 35 + 15 = 50$; $v_3 = v_2 + 15 = 50 + 15 = 65$

2) v_{n+1} représente le nombre de Smartphones vendus le mois $n + 1$ de l'année 2016 or ce commercial arrive à vendre chaque mois 15 Smartphones de plus que le mois précédent. Donc : $v_{n+1} = v_n + 15$.
Ainsi, la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 15$ et de premier terme $v_0 = 20$.

3) La suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 15$ et de premier terme $v_0 = 20$ donc :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + nr$
$\boxed{v_n = 20 + 15n}$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n > 200 \Leftrightarrow 20 + 15n > 200 \Leftrightarrow 15n > 180 \Leftrightarrow n > \frac{180}{15} \Leftrightarrow n > 12$
Donc à partir du mois de janvier 2017 il vend plus de 200 Smartphones par mois.

Problème 4

a) $Q_1 = 4\,500 \times 1{,}03 =$ **4 635 €** et $Q_2 = 4\,635 \times 1{,}03 =$ **4 774,05 €**.

b) La suite (Q_n) est une **suite géométrique de raison q = 1,03 et de terme initial Q_0 = 4 500**.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n = Q_0 \times q^n$, donc $\mathbf{Q_n = 4\,500 \times 1{,}03^n}$.

d) On cherche le plus petit entier N tel que $4\,500 \times 1{,}03^N > 9\,000$. On trouve N = 24.
2015 + 24 = 2039 donc <u>le loyer dépassera le double du loyer initial en 2039</u>.

Exercices : fonction exponentielle

Exercice 1

a) $e^x \times e^{3x-1} = e^{x+3x-1} = e^{4x-1}$
b) $\frac{e^{-x}}{e^{4-x}} = e^{-x-(4-x)} = e^{-x-4+x} = e^{-4}$
c) $(e^{5x})^3 = e^{5x\times 3} = e^{15x}$
d) $(e^x-1)(e^x+1) = (e^x)^2 - 1^2 = e^{2x}-1$
e) $\frac{e^{-x}\times e^{9x}}{e^{3x}} = \frac{e^{-x+9x}}{e^{3x}} = \frac{e^{8x}}{e^{3x}} = e^{8x-3x} = e^{5x}$
f) $e^x \times e^{5x-2} \times e = e^{x+5x-2+1} = e^{6x-1}$
g) $\frac{e^{-x}}{e^{7-x}} \times e^x = e^{-x-(7-x)} \times e^x = e^{-x-7+x+x} = e^{-7+x}$
h) $\frac{e^{x+4}}{(e^{3x})^2} = \frac{e^{x+4}}{e^{6x}} = e^{x+4-6x} = e^{-5x+4}$

Exercice 2

a) (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = e^{-7n}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = e^{-7n}$. donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = e^{-7}$ et de premier terme $u_0 = e^{-7\times 0} = e^0 = 1$.

b) (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{e^{-2n}\times e^{7n}}{e^{3n}}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{e^{-2n}\times e^{7n}}{e^{3n}} = \frac{e^{-2n+7n}}{e^{3n}} = \frac{e^{5n}}{e^{3n}} = e^{5n-3n} = e^{2n}$. donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = e^2$ et de premier terme $v_0 = e^{2\times 0} = e^0 = 1$.

c) (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = (e^{-4n})^{-2}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n = (e^{-4n})^{-2} = e^{-4n\times(-2)} = e^{8n}$. donc la suite (w_n) est géométrique de raison $q = e^8$ et de premier terme $w_0 = e^{8\times 0} = e^0 = 1$.

Exercice 3

a) $e^{3x-7} = -2$ or pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e^{3x-7} > 0$ donc $S = \emptyset$.
b) $(e^x)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow e^{2x} = e^0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ donc $S = \{0\}$.
c) $e^{-3x+8} = e^{-5} \Leftrightarrow -3x + 8 = -5 \Leftrightarrow -3x = -13 \Leftrightarrow x = \frac{13}{3}$ donc $S = \left\{\frac{13}{3}\right\}$.
d) $e^{x^2} - e = 0 \Leftrightarrow e^{x^2} = e \Leftrightarrow e^{x^2} = e^1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \ ou \ x = 1$ donc $S = \{-1; 1\}$.

Exercice 4

a) $e^x > e \Leftrightarrow e^x > e^1 \Leftrightarrow x > 1$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S =]1; +\infty[$.

b) $e^{-3x+1} \geqslant e^4 \Leftrightarrow -3x + 1 \geqslant 4$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$\Leftrightarrow -3x \geqslant 3 \Leftrightarrow x \leqslant -1$
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S =]-\infty; -1]$.

c) $e^{7x-21} < 1 \Leftrightarrow e^{7x-21} < e^0 \Leftrightarrow 7x - 21 < 0$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$\Leftrightarrow 7x < 21 \Leftrightarrow x < 3$
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S =]-\infty; 3[$.

d) $e^{-2x+5} - e^{8x-3} \leqslant 0 \Leftrightarrow e^{-2x+5} \leqslant e^{8x-3} \Leftrightarrow -2x + 5 \leqslant 8x - 3$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$\Leftrightarrow -2x - 8x \leqslant -5 - 3 \Leftrightarrow -10x \leqslant -8 \Leftrightarrow x \geqslant 0{,}8$
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S = [0{,}8; +\infty[$

e) $e^x \leqslant 0$ or pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e^x > 0$ donc $S = \emptyset$.

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction.

a) $f : x \mapsto e^{4x+1} - 4x + 7$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et $f'(x) = 4\,e^{4x+1} - 4 = 4(e^{4x+1} - 1)$, pour tout réel x.

On obtient le signe de $f'(x)$ en résolvant l'inéquation $4(e^{4x+1} - 1) \geqslant 0$.

$4(e^{4x+1} - 1) \geqslant 0 \Leftrightarrow e^{4x+1} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^{4x+1} \geqslant 1 \Leftrightarrow e^{4x+1} \geqslant e^0 \Leftrightarrow 4x + 1 \geqslant 0$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow x \geqslant \frac{-1}{4}$

Ainsi on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$ $\frac{-1}{4}$ $+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$ 0 $+$
Variations de f	$\searrow$ 9 $\nearrow$

$f\left(\frac{-1}{4}\right) = e^{4\times\frac{-1}{4}+1} - 4 \times \left(\frac{-1}{4}\right) + 7 = 1 + 1 + 7 = 9$

b) $g : x \mapsto xe^{5x}$

g est de la forme $u \times v$ avec, pour tout réel x, $u(x) = x$ et $v(x) = e^{5x}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $u(x) = x$ et $v(x) = e^{5x}$

Donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 5e^{5x}$

Et $g'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) = 1 \times e^{5x} + 5e^{5x} \times x = (5x + 1)e^{5x}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{5x} > 0$ donc $g'(x)$ est du même signe que $5x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

Or $5x + 1 > 0 \Leftrightarrow 5x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{5}$.

Ainsi, on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$ $-\frac{1}{5}$ $+\infty$
Signe de $g'(x)$	$-$ 0 $+$
Variations de g	$\searrow$ $-\frac{1}{5}e^{-1}$ $\nearrow$

$g\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{5}e^{5\times\left(-\frac{1}{5}\right)} = -\frac{1}{5}e^{-1}$

c) $h : x \mapsto \frac{1}{e^x+1}$

La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. (car $e^x > 0$ pour tout x réels)

h est de la forme $\frac{1}{v}$ avec, pour tout réel x, $v(x) = e^x + 1$ et $v'(x) = e^x$

Et $h'(x) = -\frac{v'(x)}{(v(x))^2} = -\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-e^x < 0$ et $(e^x + 1)^2 > 0$ donc $h'(x)$ est strictement négative sur $\mathbb{R}$, et la fonction h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

d) $k : x \mapsto \frac{e^x+1}{e^x+3}$

k est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

k est de la forme $\frac{u}{v}$ avec, pour tout réel x, $u(x) = e^x + 1$ et $v(x) = e^x + 3$

Donc $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = e^x$

Et $k'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{e^x\times(e^x+3)-(e^x+1)\times e^x}{(e^x+3)^2} = \frac{(e^x+3-e^x-1)\times e^x}{(e^x+3)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+3)^2}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2e^x > 0$ et $(e^x + 3)^2 > 0$ donc $k'(x)$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$, et la fonction k est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercices : Géométrie repérée, vecteurs et droites du plan

Exercice 1

1. $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{9} \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} \times (-\frac{5}{9}) - \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{6} - \frac{5}{6} = 0$. Donc ces vecteurs sont colinéaires.

$\vec{u}.\vec{w} = -\frac{3}{2} \times (-2) + \frac{1}{2} \times 3 = 3 + \frac{3}{2} \neq 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{w}$ ne sont pas orthogonaux.

Exercice 2

1. Soit M$(x\ ;\ y)$ un point du plan.

M $\in D \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-4 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow det(\overrightarrow{AM}\ ;\vec{u}) = 0$

$\Leftrightarrow 5(x-1) - (-2)(y-4) = 0$

$\Leftrightarrow 5x - 5 + 2y - 8 = 0$

$\Leftrightarrow 5x + 2y - 13 = 0$

Une équation cartésienne de D est $5x + 2y - 13 = 0$

2. Soit M$(x\ ;\ y)$ un point du plan.

M $\in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+4 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\vec{n} = 0$

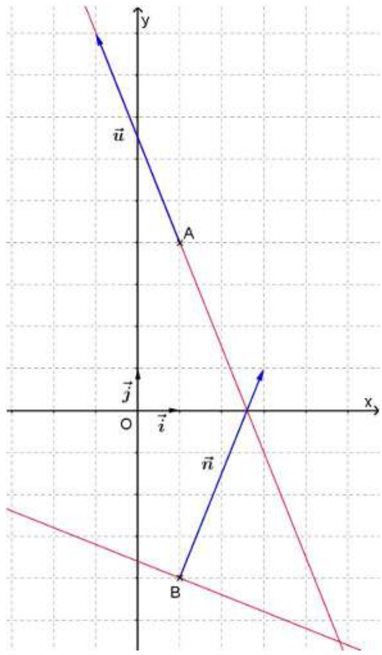
$\Leftrightarrow 2(x-1) + 5(y+4) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 2 + 5y + 20 = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 5y + 18 = 0$

Une équation cartésienne de Δ est $2x + 5y + 18 = 0$

3.



Exercice 3

1. La droite d'équation $-3x + 2y + 1 = 0$ admet pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}\binom{-2}{-3}$ et pour vecteur normal $\vec{v}\binom{-3}{2}$

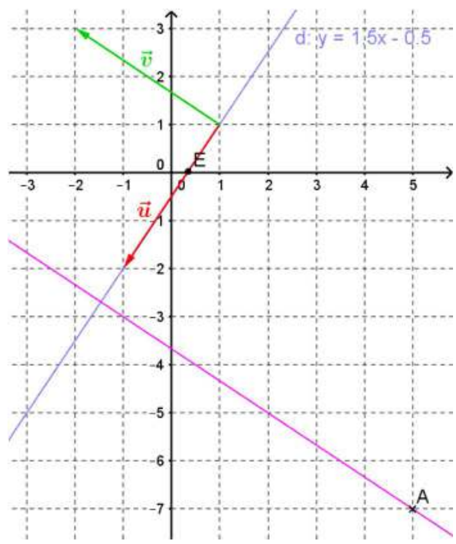
2. $-3x + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ qui est l'équation réduite de cette droite.

3. $A(5\ ;-7)$ appartient à d si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de d.
Or $-3 \times 5 + 2 \times (-7) + 1 = -15 - 14 + 1 \neq 0$ donc $A \notin d$

4. E appartient à l'axe des abscisses donc son ordonnée est nulle.

$\boldsymbol{E(x_E\ ;0) \in d \Leftrightarrow -3x_E + 2 \times 0 + 1 = 0 \Leftrightarrow -3x_E = -1 \Leftrightarrow x_E = \frac{1}{3}}$

donc $\boldsymbol{E(\frac{1}{3}\ ;0)}$



5. La droite $\boldsymbol{d'}$ est perpendiculaire à d donc elle admet le vecteur $\boldsymbol{\vec{u}}$ comme vecteur normal et son équation est de la forme $\boldsymbol{-2x - 3y + c = 0}$

De plus, $\boldsymbol{A(5\ ;-7) \in d'}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{-2 \times 5 - 3 \times (-7) + c = 0}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{-10 + 21 + c = 0 \Leftrightarrow c = -11}$

Ainsi une équation cartésienne de $\boldsymbol{d'}$ est $\boldsymbol{-2x - 3y - 11 = 0}$ et une autre équation, plus simple, $\boldsymbol{2x + 3y + 11 = 0}$

On peut vérifier toutes nos réponses en traçant les droites et vecteurs dans un repère :

Exercice 4

1. $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} (-3)-2 \\ -1-(-2) \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BA}\binom{-5}{3}$

La droite (AB) admet le vecteur $\overrightarrow{BA}$ comme vecteur directeur donc une équation cartésienne est de la forme $3x + 5y + c = 0$

Et $A \in (AB)$ donc $3 \times (-3) + 5 \times 1 + c = 0 \Leftrightarrow c = 4$

Ainsi une équation cartésienne de la droite (AB) est $3x + 5y + 4 = 0$

2. d a pour équation cartésienne $3x - 4y - 5 = 0$ donc elle admet comme vecteur directeur $\vec{u}\binom{4}{3}$ qui n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{AB}\binom{5}{-3}$. Ainsi les droites d et (AB) ne sont pas parallèles.

Leur point d'intersection est le point dont les coordonnées vérifient le système :

$(S)\begin{cases}3x + 5y + 4 = 0\\3x - 4y - 5 = 0\end{cases}$ on peut le résoudre par combinaisons linéaires en soustrayant les deux équations :

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x + 5y + 4 = 0\\9y + 9 = 0\end{cases} \Leftrightarrow\begin{cases}3x + 5y + 4 = 0\\y = -1\end{cases} \Leftrightarrow\begin{cases}3x + 5 \times (-1) + 4 = 0\\y = -1\end{cases} \Leftrightarrow\begin{cases}x = \dfrac{1}{3}\\y = -1\end{cases}$$

Le point d'intersection de d et de (AB) est le point de coordonnées $(\frac{1}{3}\,; -1)$

3. Δ est parallèle à d d'équation cartésienne $3x - 4y - 5 = 0$ donc elle admet le même vecteur directeur et son équation est de la forme $3x - 4y + c = 0$

Or $C(-1\,;\,-3) \in \Delta \Leftrightarrow 3 \times (-1) - 4 \times (-3) + c = 0 \quad \Leftrightarrow c = -9$

Donc l'équation de Δ est : $3x - 4y - 9 = 0$

Exercice 5

1. L'équation cartésienne du cercleC de centre K et de rayon R est de la forme :

$(x - x_K)^2 + (y - y_K)^2 = R^2$ donc, ici : $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$

2. Un point appartient à un cercle si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation du cercle.

Pour $M(-1\,;2)$: $(-1 - 3)^2 + (2 + 1)^2 = 16 + 9 = 25$ donc $M \in$ C

Pour $N(\frac{8}{5}\,; -\frac{29}{5})$: $\left(\frac{8}{5} - 3\right)^2 + \left(-\frac{29}{5} + 1\right)^2 = (-\frac{7}{5})^2 + \left(-\frac{24}{5}\right)^2 = \frac{49}{25} + \frac{576}{25} = \frac{625}{25} = 25$ donc $N \in$ C

Pour $P(\frac{9}{5}\,;\frac{2}{5})$: $\left(\frac{9}{5} - 3\right)^2 + \left(\frac{2}{5} + 1\right)^2 = \left(-\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{36}{25} + \frac{49}{25} = \frac{85}{25} = \frac{17}{5} \neq 25$ donc $P \notin$ C

Problème 5

1. On chercher les équations de (AB) et de la hauteur car H est l'intersection de ces deux droites.

- $\overrightarrow{AB}\binom{3-(-3)}{5-2}$ donc $\overrightarrow{AB}\binom{6}{3}$

  La hauteur (HC) admet le vecteur $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur normal donc elle admet une équation cartésienne de la forme $6x + 3y + c = 0$

  Et $C \in (HC)$ donc $6 \times 2 + 3 \times 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -18$

  Ainsi, la hauteur issue de C a pour équation cartésienne $6x + 3y - 18 = 0$

- La droite (AB) admet le vecteur $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur directeur donc elle admet une équation cartésienne de la forme $3x - 6y + c = 0$

  Et $A \in (AB)$ donc $3 \times (-3) - 6 \times 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = 21$

  Ainsi (AB) a pour équation cartésienne $3x - 6y + 21 = 0$

- H est l'intersection des droites (AB) et (HC), ses coordonnées vérifient le système :

  $(S)\begin{cases}3x - 6y + 21 = 0\\6x + 3y - 18 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x - 2y + 7 = 0\\2x + y - 6 = 0\end{cases}$ (on pouvait simplifier les équations pour résoudre par substitution).

  $$\Leftrightarrow\begin{cases}x = 2y - 7\\2(2y - 7) + y - 6 = 0\end{cases} \Leftrightarrow\begin{cases}x = 2y - 7\\4y - 14 + y - 6 = 0\end{cases} \Leftrightarrow\begin{cases}x = 2y - 7\\5y - 20 = 0\end{cases} \Leftrightarrow\begin{cases}x = 2y - 7\\y = 4\end{cases}$$

  $$\Leftrightarrow\begin{cases}x = 2 \times 4 - 7 = 1\\y = 4\end{cases}$$

  Donc le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC est $H(1\,;4)$.

2. $Aire(ABC) = \frac{AB \times CH}{2}$

On calcule $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

et $CH = \sqrt{(x_H - x_C)^2 + (y_H - y_C)^2} = \sqrt{(1 - 2)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{5}$

$Aire(ABC) = \frac{3\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{2} = \frac{15}{2}$

L'aire du triangle ABC est 7,5.

Exercices : probabilités

Exercice 1

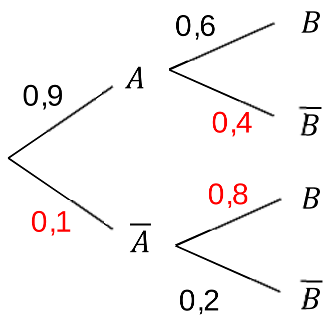
1) X est la variable aléatoire qui donne le gain algébrique de l'acheteur d'un billet.
Cette variable aléatoire prend les valeurs :
-2 ; 48 ; 198 et $1\,198$.
La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donc :

x_i en €	-2	48	198	$1\,198$
$p(X = x_i)$	$\frac{1985}{2000}$	$\frac{10}{2000}$	$\frac{4}{2000}$	$\frac{1}{2000}$

2) $E(X) = \frac{1985}{2000} \times (-2) + \frac{10}{2000} \times 48 + \frac{4}{2000} \times 198 + \frac{1}{2000} \times 1198 = -\frac{3}{4}$
Le gain moyen que peut espérer un joueur est de $-0{,}75$ €.
L'espérance est négative donc le jeu n'est pas favorable aux joueurs.

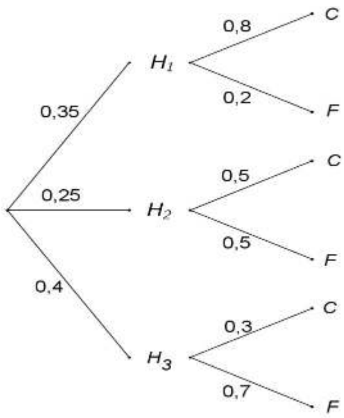
3) Soit x la somme rapportée par le plus gros lot.
Le jeu est équitable lorsque :
$E(X) = 0$ c'est-à-dire $\frac{1985}{2000} \times (-2) + \frac{10}{2000} \times 48 + \frac{4}{2000} \times 198 + \frac{1}{2000} \times (x - 2) = 0$
c'est-à-dire $-\frac{2698}{2000} + \frac{1}{2000} \times (x - 2) = 0$
c'est-à-dire $x = \frac{2698}{2000} \times 2000 + 2 = 2700$
Ainsi, le plus gros lot doit rapporter 2 700 € afin que le jeu soit équitable.

Exercice 2



1) $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}9 \times 0{,}6 = 0{,}54$
2) A et $\overline{A}$ constitue une partition de l'univers Ω donc d'après la formule des probabilités totales on a :
$P(B) = P(A \cap B) + P\left(B \cap \overline{A}\right) = 0{,}54 + 0{,}1 \times 0{,}8 = 0{,}54 + 0{,}08 = 0{,}62$
3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}9 + 0{,}62 - 0{,}54 = 0{,}98$
4) $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}54}{0{,}62} \approx 0{,}87$

Exercice 3



a. Voilà l'arbre pondéré traduisant la situation de l'exercice :

b. $P(C \cap H_3) = P_{H_3}(C) \times P(H_3) = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12$.
La probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3 est de **0,12**.

c. H_1 , H_2 et H_3 constitue une partition de l'univers Ω donc d'après la formule des probabilités totales on a :
$P(C) = P(H_1 \cap C) + P(H_2 \cap C) + P(H_3 \cap C) = 0{,}35 \times 0{,}8 + 0{,}25 \times 0{,}5 + 0{,}12 = 0{,}525$.
La probabilité de l'événement C est donc bien égale à **0,525**.

d. On cherche $P_C(H_1)$.

$$P_C(H_1) = \frac{P(H_1 \cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}35 \times 0{,}8}{0{,}525} \approx 0.533$$

Sachant que l'arbre choisi est un conifère, la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 est donc environ égale à **0,533**.