Livret pour la Terminale Maths Complémentaires – Rentrée 2021

Sommaire

Ce livret met l'accent sur quatre thèmes fondamentaux pour la Terminale Mathématiques Complémentaires : second degré, dérivation, suites, fonction exponentielle. Un autre thème est assez important : probabilités.

Pour chacun de ces thèmes :

- Connaître le cours (faire des fiches), refaire plusieurs fois les exemples et les exercices du cours.

- Refaire tous les DS, les interrogations et les DM, ainsi que **les exercices proposés dans ce document**, faits pendant l'année, d'abord sans aucune aide, puis si nécessaire avec l'aide du cours et en dernier recours de la correction.

- Penser à l'aide qu'apporte la calculatrice : maîtriser la représentation graphique de fonctions, l'utilisation du menu statistiques, le calcul des termes d'une suite… Dès que possible, vérifier les réponses à l'aide de la calculatrice.

- Il est conseillé de fractionner le travail (éviter les longues séances de révision : il est préférable de se concentrer par exemple 30 minutes sur un exercice, sans musique ni téléphone à portée de main).
- Il vous est conseillé de dédier un cahier à votre travail des vacances, en mathématiques ou dans d'autres matières. Vous pourrez ainsi le présenter à vos professeurs à la rentrée pour qu'ils puissent mesurer vos efforts.

Certains de ces exercices sont difficiles, il est normal de ne pas savoir tout faire du premier coup !

Les premiers chapitres de Terminale Mathématiques complémentaires devraient concerner les suites, la dérivation et les probabilités : **terminer** les révisions par ces notions.

En fin de livret, on trouvera des éléments de correction.

Second degré : Rappels de cours

➢ <u>Un trinôme du second degré peut s'écrire sous plusieurs formes</u> :

- **forme développée** : $f(x) = ax^2 + bx + c$
- **forme canonique** : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ où α et β sont deux réels fixés.
- **forme factorisée éventuelle :** $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_1 sont les racines éventuelles.

➢ <u>Somme et produit des racines</u> :
Si f admet deux réels (éventuellement confondus) x_1 et x_2 pour racines, alors :

- La **somme** des racines est : $\boldsymbol{S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$
- Le **produit** des racines est : $\boldsymbol{P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}}$

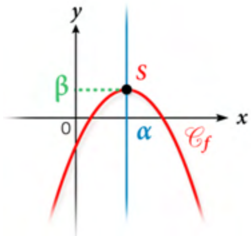
➢ <u>Représentation graphique ; variations</u>

La courbe représentant f est une **parabole** de sommet $S(\alpha\,;\beta)$.

Si $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut ("heureuse"). On en déduit les variations de f.

Si $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas ("triste"). On en déduit les variations de f.

La parabole est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \alpha$.

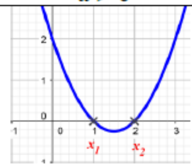
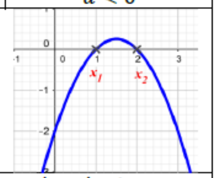
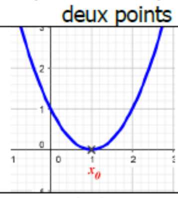
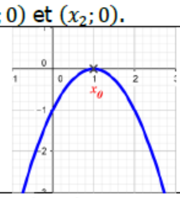
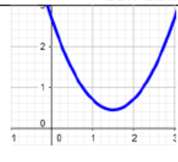
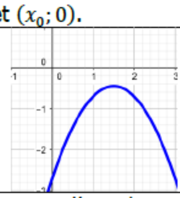


➢ <u>Equation du second degré</u>

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$) correspondent aux racines de f.

<u>Méthode :</u>

- Toujours essayer de repérer une factorisation (par un facteur commun ou par une identité remarquable).
- Repérer une racine « évidente », puis calculer l'autre racine rapidement en utilisant la somme ou le produit des racines.
- Dans le cas où on ne remarque rien de particulier, on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Signe de $\Delta = b^2 - 4ac$	Racines de f	Forme factorisée de f	Signe de $f(x)$	Courbe représentative de f : $a > 0$	Courbe représentative de f : $a < 0$
$\Delta > 0$	$\boldsymbol{x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$ et $\boldsymbol{x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$	$\boldsymbol{a(x-x_1)(x-x_2)}$	x : $-\infty$ … x_1 … x_2 … $+\infty$ Signe de $f(x)$: Signe de a 0 Signe de $-a$ 0 Signe de a		
				La parabole coupe l'axe des abscisses en deux points $(x_1;0)$ et $(x_2;0)$.	
$\Delta = 0$	$\boldsymbol{x_0 = \frac{-b}{2a}}$	$\boldsymbol{a(x-x_0)^2}$	x : $-\infty$ … x_0 … $+\infty$ Signe de $f(x)$: Signe de a 0 Signe de a		
				La parabole coupe l'axe des abscisses en son sommet $(x_0;0)$.	
$\Delta < 0$	aucune	Ne se factorise pas	x : $-\infty$ … $+\infty$ Signe de $f(x)$: Signe de a		
				La parabole ne coupe pas l'axe des abscisses.	

Exercices second degré

Exercice 1

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 - 3x + 4$.

On admet que pour tout réel x on a :

$f(x) = -(x + 1{,}5)^2 + 6{,}25$ et pour tout réel x on a :
$f(x) = -(x + 4)(x - 1)$.

En utilisant la forme la plus adaptée de $f(x)$, répondre aux questions suivantes :

1) Résoudre $f(x) = 0$.
2) Résoudre $f(x) = 6{,}25$.
3) Dresser le tableau de variations de f.

Exercice 2

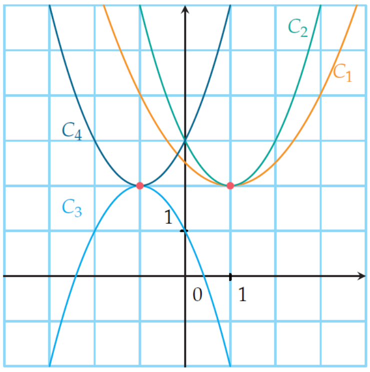
Associer les courbes C_1, C_2, C_3 et C_4 des fonctions du second degré suivantes à leur forme canonique en justifiant.

1) $f_1(x) = (x - 1)^2 + 2$

2) $f_2(x) = -(x + 1)^2 + 2$

3) $f_3(x) = (x + 1)^2 + 2$

4) $f_4(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2 + 2$



Exercice 3

Résoudre les équations suivantes.

a) $2x^2 + 3x - 5 = 0$
b) $-5x^2 + 7x - 4 = 0$
c) $9x^2 - 18x + 9 = 0$
d) $x^2 + 3x + 2 = 0$

Exercice 4

Déterminer, lorsque cela est possible, une expression factorisée des trinômes de degré 2 suivants :

a) $f(x) = x^2 - 3x - 10$

b) $g(x) = 3x^2 - x + 7$

c) $h(x) = -8x^2 + 40x - 50$

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $x^2 + x - 2 > 0$

b) $-3x^2 + x - 2 \leqslant 0$

c) $2x^2 + 3x \geqslant 0$

d) $2x^2 - 8 < 0$

Problème 1

Une entreprise produit de la pâte à papier.

On note q la masse de pâte produite, exprimée en tonnes, avec $q \in [0; 60]$.

Le coût de production, en euros, pour une quantité produite q est

$C(q) = q^2 + 632q + 1075$.

L'entreprise vend toute sa production à un prix à la tonne fixe. L'activité est à l'équilibre pour la production et la vente de 25 tonnes de pâte.

a) Déterminer le prix de vente à la tonne.

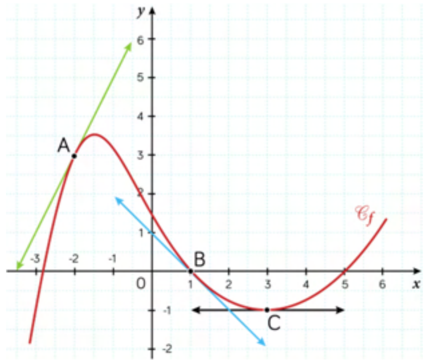
b) En déduire l'expression du bénéfice en fonction de q.

c) Dans quel intervalle doit se situer la production pour que l'activité soit rentable ?

Dérivation : Rappels de cours

➢ Nombre dérivé et tangente :

Par définition, $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ (lorsque cette limite existe **et** est finie)



$f'(a)$ est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe au point d'abscisse a.

On retiendra en particulier « **dérivée nulle : tangente horizontale** ».

Dans l'exemple ci-contre, $f'(3) = 0$, $f'(-2) = 2$ et $f'(1) = -1$.

L'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est :

$$\boldsymbol{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$$

➢ Dérivées des fonctions usuelles

Fonction usuelle	Ensemble de définition	Ensemble de dérivabilité	Fonction dérivée
$f(x) = k$ avec k un nombre réel fixé	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f'(x) = \frac{1}{x}$	$]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[= \mathbb{R}^*$	$]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0\,;+\infty[$	**$]0\,;+\infty[$**	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

➢ Dérivées et opérations

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et $k \in \mathbb{R}$, alors :

- La fonction $ku : x \mapsto ku(x)$ est dérivable sur I et $(ku)' = \boldsymbol{ku'}$
- La fonction $u + v : x \mapsto u(x) + v(x)$ est dérivable sur I et $\boldsymbol{(u + v)' = u' + v'}$
- La fonction $uv : x \mapsto u(x) \times v(x)$ est dérivable sur I et $\boldsymbol{(u\,v)' = u'v + u\,v'}$ **/!** $\boldsymbol{(u\,v)' \neq u' + v'}$!

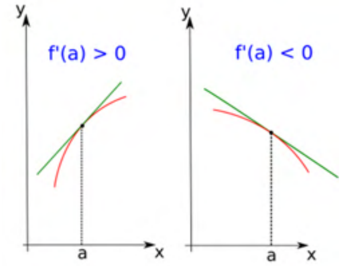
Soient u et v des fonctions dérivables sur I avec v ne s'annulant pas sur I, alors :

- La fonction $\frac{1}{v} : x \mapsto \frac{1}{v(x)}$ est elle aussi dérivable sur I et on a la formule suivante : $\boldsymbol{\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}}$
- La fonction $\frac{u}{v} : x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$ est elle aussi dérivable sur I et on a la formule suivante : $\boldsymbol{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}}$

Soit m et p deux réels et g une fonction dérivable sur I telle que, pour tout $x \in I$, $mx + p \in I$.
La fonction f définie par $f(x) = g(mx + p)$ est définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on a :

$$\boldsymbol{f'(x) = m\,g'(mx + p)}$$

➢ <u>Signe de la dérivée et variations de la fonction</u>

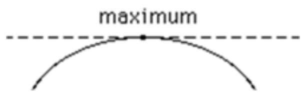


1) Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.
2) Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.
3) Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Pour déterminer les variations d'une fonction f :

- On calcule la dérivée $f'(x)$
- On étudie le signe de $f'(x)$
- On dresse le tableau de variations de f

➢ <u>Extrema d'une fonction</u>



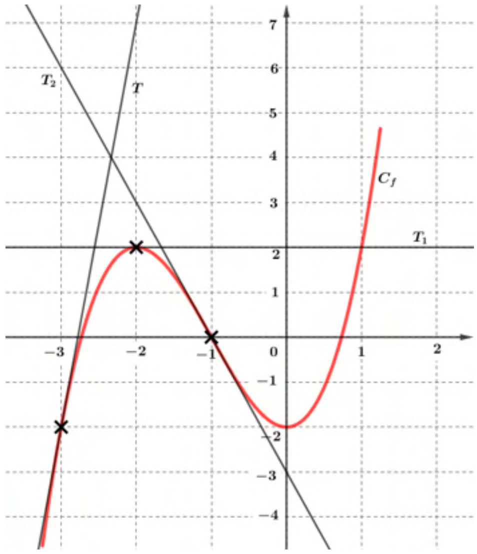
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

Si a est un réel de l'intervalle I mais qui n'est pas une borne de I et si f' s'annule en a en changeant de signe, alors f admet localement un extremum en a qui est $f(a)$: on parle d'extremum local.

Exercices dérivation

Exercice 1

Sur le graphique ci-contre, C_f est la représentation graphique d'une fonction f dérivable sur $[-3{,}25; 1{,}25]$.
T est sa tangente au point d'abscisse -3 et T_1 sa tangente au point d'abscisse -2 et T_2 sa tangente au point d'abscisse -1.



1) Lire les valeurs de :
- **a.** $f(-3)$ et $f'(-3)$.
- **b.** $f(-2)$ et $f'(-2)$.
- **c.** $f(-1)$ et $f'(-1)$.

2) Donner les équations de T ; T_1 et T_2.

3) Sur quel(s) intervalle(s) le nombre dérivé de la fonction est-il négatif ?

4) Sur quel(s) intervalle(s) le nombre dérivé de la fonction est-il positif ?

Exercice 2

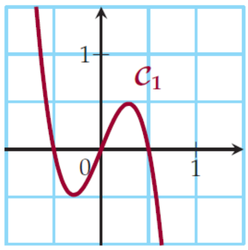
Déterminer, en détaillant vos calculs, la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes.

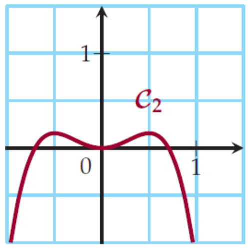
1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 + 1$
2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3(x+2)$
3) Soit h la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par : $h(x) = \frac{1}{x^4}$
4) Soit l la fonction définie sur $]-\infty\,; 0[\cup]0\,; +\infty[$ par : $i(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$

Exercice 3

Voici deux courbes dont l'une représente une fonction f et l'autre sa dérivée f'.

Quelle est la courbe représentant f et quelle est celle représentant f' ?





Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x^2 - x$

1) Déterminer $f'(x)$.

2) Etudier le signe de $f'(x)$.

3) En déduire le tableau de variations de f.

4) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2.

Exercice 5

Dans chaque cas, déterminer les variations de la fonction f définie par :

1) $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$ pour $x \in]0; +\infty[$.

2) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ pour $x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

3) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ pour $x \in \mathbb{R}$

Problème 2

Soit C_f la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

Soit $\mathcal{D}$ la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x - 2$.

Soit h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.

1) Déterminer $h'(x)$.

2) Etudier le signe de $h'(x)$.

3) En déduire le tableau de variations de h.

4) En déduire les positions relatives des courbes C_f et $\mathcal{D}$ sur $[0; +\infty[$.

Suites : Rappels de cours

- Deux modes de génération d'une suite :

  - Formule explicite $\boldsymbol{u_n = f(n)}$ avec $n \in \mathbb{N}$. Exemple : $u_n = n^2 - 3n$ alors $u_7 = 7^2 - 3 \times 7 = 28$

  - Par récurrence $\begin{cases} \boldsymbol{u_0 = a} \\ \boldsymbol{u_{n+1} = f(u_n)} \textbf{ pour tout } \boldsymbol{n \geqslant 0} \end{cases}$

  Exemple : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$ alors $u_1 = 2 \times 5 - 3 = 7$; $u_2 = 2 \times 7 - 3 = 11$; …

- Sens de variation d'une suite :

  La suite (u_n) est **croissante** à partir du rang k lorsque pour tout $n \geqslant k$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
  La suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang k lorsque pour tout $n \geqslant k$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
  On dit que (u_n) est **monotone** si elle est croissante (ou décroissante) à partir de son 1er terme.

  Pour montrer qu'une suite est monotone, **on calcule $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n}$** puis on étudie son signe.

- Suites arithmétiques :

$\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$ r est la raison

$\boldsymbol{u_n = u_0 + nr}$ Exemple : $u_n = 50 + 3n$ suite arithmétique de raison 3 et de terme initial 50

$\boldsymbol{u_n = u_1 + (n-1)r}$ dans le cas où le premier terme de la suite est u_1

Exemple : soit une suite arithmétique de raison 5 telle que $u_1 = 20$. Alors $u_{10} = u_1 + 9r = 65$.

Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique = $\boxed{\dfrac{(\text{nombre de termes}) \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}}$

En particulier, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

- Suites géométriques :

$\boldsymbol{u_{n+1} = q \times u_n}$ q est la raison

$\boldsymbol{u_n = u_0 \times q^n}$ Exemple : $u_n = 4 \times 1{,}5^n$ suite géométrique de raison 1,5 et de terme initial 4

$\boldsymbol{u_n = u_1 \times q^{n-1}}$ dans le cas où le premier terme est u_1

Pour montrer qu'une suite est géométrique, **on exprime $\boldsymbol{u_{n+1}}$** et on montre que $u_{n+1} = q \times u_n$.

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique : $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} u_i = \boxed{\text{premier terme} \times \dfrac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}}$

En particulier, $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

- Comportement à l'infini : suite convergente, suite divergente

(u_n) **converge vers $\boldsymbol{\ell}$** lorsque ses termes se rapprochent de plus en plus de ℓ lorsque n devient très grand.
(u_n) **diverge** lorsqu'elle ne converge pas (soit elle n'a pas de limite, soit elle tend vers $+\infty$ ou $-\infty$).

Exercices suites

Exercice 1

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$. Calculer u_5.

Exercice 2

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = (n+5)^2 + 2$.

1) Calculer les trois premiers termes de la suite.
2) Exprimer u_{n+1} en fonction de n.
3) Etablir le sens de variation de la suite (u_n) en étudiant le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

Exercice 3

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 4 \end{cases}$. Calculer u_1, u_2 et u_3.

Exercice 4

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + 1 \end{cases}$. Calculer u_1, u_2 et u_3.

Exercice 5

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $u_0 = 16$.

1) Exprimer u_n en fonction de n.
2) Calculer u_6.

Exercice 6

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = n^2 + 4n$. Cette suite est-elle arithmétique ?

Exercice 7

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = 4n + 7$. Cette suite est-elle arithmétique ?

Exercice 8

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_5 = 9$ et $u_{20} = 28$.

1) Calculer la raison de cette suite.
2) Quel est le sens de variation de cette suite ?
3) Calculer u_{50}.

Exercice 9

Soit (u_n) une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 2$.

1) Exprimer u_n en fonction de n.
2) Calculer u_3.

Exercice 10

Soit (u_n) une suite géométrique de raison positive telle que $u_0 = 7$ et $u_2 = 28$.
Déterminer la raison de cette suite, puis calculer u_5.

Exercice 11

Les premiers termes d'une suite sont : $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_2 = 3$.
Cette suite peut-elle être géométrique ?

Exercice 12

Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_1 = 480$ et de raison $\frac{1}{2}$.

1) Calculer v_2, v_3 et v_4.
2) Pour tout entier naturel n, donner l'expression de v_n en fonction de n.
3) Etudier le sens de variation de la suite (v_n).

Problème 3

Un commercial très compétent, arrive à vendre chaque mois 15 Smartphones de plus que le mois précédent. Il a commencé son travail en décembre 2015, avec 20 ventes réussies.
Soit la suite (v_n) telle que v_n représente le nombre de Smartphones vendus le mois n de l'année 2016.
On définit $v_0 = 20$.

1) Calculer v_1, v_2 et v_3.
2) Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Justifier correctement votre réponse.
3) Exprimer v_n en fonction de n et de v_0.
4) A partir de quel mois vend-il plus de 200 Smartphones par mois ?

Problème 4

Un propriétaire propose à partir du 1er janvier 2015 un appartement dont le montant annuel initial du loyer est 4 500 €. Ce propriétaire augmente le loyer annuel chaque année de 3%.

On désigne par Q_n le montant annuel du loyer pour l'année (2015+n) ; on a donc Q_0 = 4 500.

a) Calculer Q_1 et Q_2.

b) Donner la nature de la suite (Q_n) ainsi que ses éléments caractéristiques.

c) Exprimer Q_n en fonction de n.

d) En quelle année le loyer dépassera-t-il le double du loyer initial ? (à l'aide de la calculatrice).

Fonction exponentielle : Rappels de cours

- Définition

L'unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que $f' = f$ et $f(0) = 1$ est appelée **fonction exponentielle**. On la note $\mathbf{exp} : \boldsymbol{x} \mapsto \mathbf{exp}(\boldsymbol{x})$

$\mathbf{exp}(\mathbf{1}) = \boldsymbol{e}$. Une valeur approchée de ce nombre est **2,718.**

Pour tous les nombres réels x on note $\mathbf{exp}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e^x}$**.**

- Propriétés algébriques

Pour tous les réels x et y et pour tout entier relatif n :

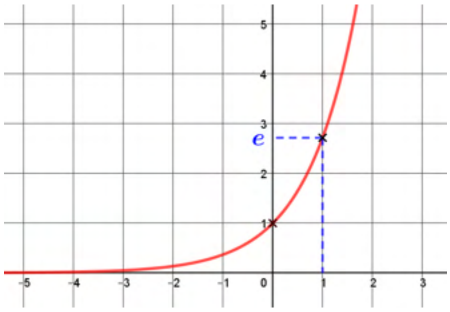
$\boldsymbol{e^{x+y} = e^x \times e^y}$ $\qquad$ $\boldsymbol{e^x} > 0$ $\qquad$ $\boldsymbol{e^{-x} = \frac{1}{e^x}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{(e^x)^n = e^{nx}}$

Pour tous les réels a, la suite (e^{na}) est une suite géométrique de raison $\boldsymbol{e^a}$.

- Etude de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$ $\mathbf{0}$ $\mathbf{1}$ $+\infty$
Variation de **exp**	$\nearrow$ $\mathbf{1}$ $\nearrow$ $\boldsymbol{e}$ $\nearrow$



- Equations et inéquations

Pour tous réels x et y :

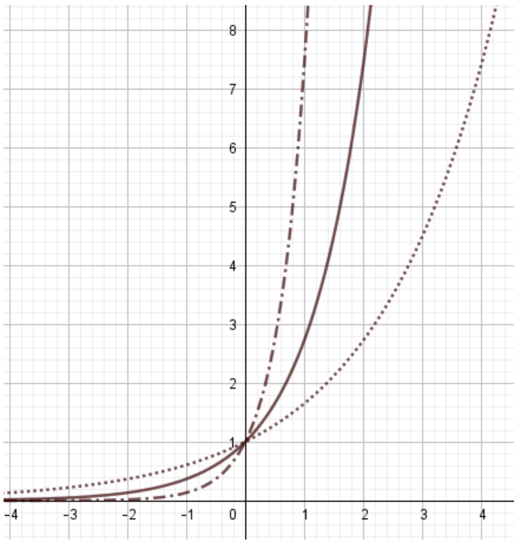
$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ $\qquad$ en particulier $\qquad$ $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$ $\qquad$ en particulier $\qquad$ $e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$ $\qquad$ La fonction exp est strictement croissante

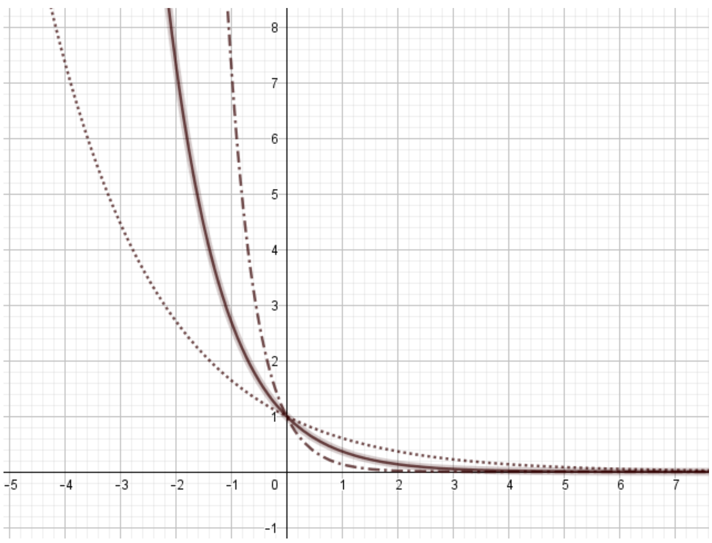
- **Fonction $\boldsymbol{x \mapsto \mathbf{exp}(ax + b)}$**

Soient a et b sont des nombres réels, la fonction $g : x \mapsto \exp(ax + b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel x, $\boldsymbol{g'(x) = a\,\mathbf{exp}(ax + b)}$

Pour tout x réel, $g\,(x) = e^{kx}$ avec $k > 0$



Pour tout x réel, $h(x) = e^{-kx}$ avec $k > 0$



Exercices fonction exponentielle

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes, où x désigne un nombre réel.

a) $e^x \times e^{3x-1}$

b) $\frac{e^{-x}}{e^{4-x}}$

c) $(e^{5x})^3$

d) $(e^x - 1)(e^x + 1)$

e) $\frac{e^{-x} \times e^{9x}}{e^{3x}}$

f) $e^x \times e^{5x-2} \times e$

g) $\frac{e^{-x}}{e^{7-x}} \times e^x$

h) $\frac{e^{x+4}}{(e^{3x})^2}$

Exercice 2

Pour chacune des suites ci-dessous dont on donne le terme général, montrer qu'il s'agit d'une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

a) (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = e^{-7n}$.

b) (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{e^{-2n} \times e^{7n}}{e^{3n}}$.

c) (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = (e^{-4n})^{-2}$.

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes :

a) $e^{3x-7} = -2$

b) $(e^x)^2 - 1 = 0$

c) $e^{-3x+8} = e^{-5}$

d) $e^{x^2} - e = 0$

Exercice 4

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $e^x > e$

2) $e^{-3x+1} \geqslant e^4$

3) $e^{7x-21} < 1$

4) $e^{-2x+5} - e^{8x-3} \leqslant 0$

5) $e^x \leqslant 0$

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction.

a) $f : x \mapsto e^{4x+1} - 4x + 7$

b) $g : x \mapsto xe^{5x}$

c) $h : x \mapsto \frac{1}{e^x+1}$

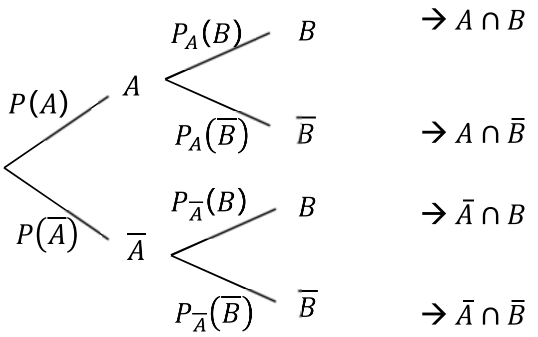
d) $k : x \mapsto \frac{e^x+1}{e^x+3}$

Probabilités : Rappels de cours

On considère une loi de probabilité P définie sur un univers fini Ω.

- <u>Probabilités conditionnelles</u>
  A et B sont deux événements avec $P(A) \neq 0$.
  - La probabilité de B sachant A est : $\boldsymbol{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$
  - $\boldsymbol{P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)}$ et $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)}$

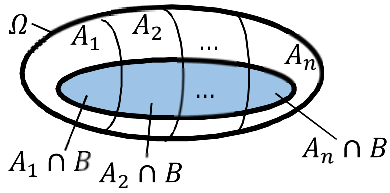
- <u>Représentation à l'aide d'un arbre ou d'un tableau</u>



	B	$\overline{B}$	Total
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
Total	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

1) La somme des probabilités des branches issues d'un même événement est toujours égale à 1.
2) La probabilité de $A \cap B$ est obtenue en multipliant les probabilités le long des branches aboutissant à B et passant par A.

- <u>Formule des probabilités totales</u>
  Si $A_1, A_2, \dots A_n$ constitue **une partition de l'univers Ω** et $P(A_i) \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$, alors, pour tout événement B, on a :
  $\boldsymbol{P(B) = P(A_1 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)}$ soit :
  $\boldsymbol{P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)}$



- <u>Indépendance de deux événements</u>
  - On dit que les événements A et B sont **indépendants** si : $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$.
  - Lorsque $P(A) \neq 0$, on a : A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

- <u>Variable aléatoire</u>
  - <u>Définition</u> : Soit une expérience aléatoire dont l'univers est l'ensemble fini Ω.
    Une **variable aléatoire**, notée $\boldsymbol{X}$, est une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui à chaque issue de Ω, associe un nombre réel.
  - Soit une expérience aléatoire dont l'univers est l'ensemble fini Ω.
    Soit X une variable aléatoire discrète définie sur Ω et prenant les valeurs $\{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n\}$.
    On définit **la loi de probabilité** de X quand à chaque valeur x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, on associe la probabilité de l'événement $\{X = x_i\}$.

    On peut donc établir le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	...	$P(X = x_n)$

  - L'**espérance** de la variable aléatoire X, notée $\boldsymbol{E(X)}$, est le nombre réel défini par :

$$\boldsymbol{E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i}$$

  - La **variance** de la variable aléatoire X, notée $\boldsymbol{V(X)}$, est le nombre réel défini par :

$$\boldsymbol{V(X) = p_1\big(x_1 - E(X)\big)^2 + p_2\big(x_2 - E(X)\big)^2 + \dots + p_n\big(x_n - E(X)\big)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i\big(x_i - E(X)\big)^2}$$

  - L'**écart-type** de la variable aléatoire X, notée $\boldsymbol{\sigma(X)}$, est le nombre réel défini par :

$$\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$$

Exercices probabilités

Exercice 1

Une association sportive organise une grande loterie. Les 2 000 billets vendus sont numérotés de 1 à 2 000.

Parmi tous ces billets :
- Un billet rapporte un lot de 1 200 € (*c'est le gros lot*).
- Quatre billets rapportent chacun un lot de 200 €.
- Dix billets rapportent chacun un lot de 50 €.
- Tous les autres billets ne rapportent rien.

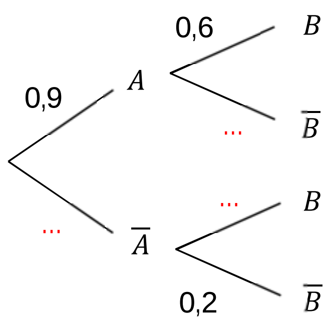
Le prix du billet est fixé à 2 €. Les billets achetés sont choisis au hasard.

X est la variable aléatoire qui donne le gain algébrique de l'acheteur d'un billet.

1) Donner la loi de probabilité de X ?
2) Déterminer l'espérance $E(X)$, arrondie au centième, puis interpréter la valeur obtenue.
3) Au lieu de rapporter 1 200 €, combien doit rapporter le gros lot afin que le jeu soit équitable ?

Exercice 2

On considère l'arbre pondéré ci-contre.
Le compléter puis calculer :
1) $P(A \cap B)$.
2) $P(B)$.
3) $P(A \cup B)$.
4) $P_B(A)$. On arrondira à 10^{-2}.



Exercice 3

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35% des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25% de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.

Le livraison de l'horticulteur H_1comporte 80% de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50% et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30%.

Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.
On envisage les événements suivants : H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »,
H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »,
H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,
C : « l'arbre choisi est un conifère »
F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

a. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
b. Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.
c. Justifier que la probabilité de l'événement C est égale à 0,525.
d. L'arbre choisi est un conifère. Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ?
On arrondira à 10^{-3}.

Eléments de correction

Exercices second degré

Exercice 1

1) $f(x) = 0 \Leftrightarrow -(x+4)(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x+4 = 0 \; ou \; x-1 = 0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -4 \; ou \; x = 1 \Leftrightarrow S = \{-4; 1\}$

2) $f(x) = 6{,}25 \Leftrightarrow -(x+1{,}5)^2 + 6{,}25 = 6{,}25 \Leftrightarrow -(x+1{,}5)^2 = 0 \Leftrightarrow (x+1{,}5)^2 = 0 \Leftrightarrow x+1{,}5 = 0$

$f(x) = 6{,}25 \Leftrightarrow x = -1{,}5 \Leftrightarrow S = \{-1{,}5\}$

3) f est une fonction polynôme de degré 2 telle que : $f(x) = -(x+1{,}5)^2 + 6{,}25$ avec $a = -1$; $\alpha = -1{,}5$ et $\beta = 6{,}25$.

Comme $a = -1 < 0$, f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\,-1{,}5]$ et strictement décroissante sur $[-1{,}5\,;\,+\infty[$
et f admet un maximum $\beta = 6{,}25$ atteint en $x = -1{,}5$.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$-1{,}5$	$+\infty$
Variations de f	↗	6,25	↘

Exercice 2

Dans chaque cas, on a l'écriture $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.
° On regarde si la parabole est tournée vers le haut ($a > 0$) ou vers le bas ($a < 0$). C_3 est la seule tournée vers le bas et f_2 a pour coefficient a le nombre -1. Donc **C_3 représente f_2.**
° Le sommet de la parabole est $S(\alpha\,;\,\beta)$. Pour f_3, on obtient $S_3(-1\,;\,2)$. C'est donc **C_4 qui représente f_3.**
° Pour les deux paraboles restantes, le sommet est le même (de coordonnées $(-1\,;\,2)$) ; il faut donc les distinguer autrement, par exemple en calculant $f(0)$: $f_1(0) = 3$. C'est donc **C_2 qui représente f_1.** On en déduit que **C_1 représente f_4.**

Remarque : il y a d'autres façons de faire ; on peut, par exemple, calculer l'image de 0,5 par chacune des fonctions et regarder quelle courbe passe par le point de coordonnées $(0{,}5\,;\,f(0{,}5))$

Exercice 3

a) $2x^2 + 3x - 5 = 0$
$\mathbf{2x^2+3x-5}$ est un trinôme et $\mathbf{1}$ en est une racine évidente.
En utilisant le produit des racines, $P = \frac{c}{a} \Leftrightarrow 1 \times x_2 = \frac{-5}{2} \Leftrightarrow x_2 = -2{,}5$, donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $S = \{-2{,}5; 1\}$.

Ou méthode avec le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 9 + 40 = 49$.

$\Delta > 0$ donc l'équation admet 2 solutions réelles distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{49}}{2\times 2} = \frac{-3-7}{4} = -\frac{10}{4} = -2{,}5$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{49}}{2\times 2} = \frac{-3+7}{4} = \frac{4}{4} = 1$ $\quad S = \{-2{,}5\,;1\}$.

b) $-5x^2 + 7x - 4 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times (-5) \times (-4) = 49 - 80 = -31$.
$\Delta < 0$ donc l'équation n'admet aucune solution réelle $S = \emptyset$.

c) $9x^2 - 18x + 9 = 0 \Leftrightarrow (3x)^2 - 2 \times 3x \times 3 + 3^2 = 0 \Leftrightarrow (3x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{3} = 1$.

Ou méthode avec le discriminant : $\Delta = (-18)^2 - 4 \times 9 \times 9 = 324 - 324 = 0$.

$\Delta = 0$ donc l'équation admet une unique solution réelle : $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{18}{2\times 9} = \frac{18}{18} = 1$.

Ou méthode avec racine évidente : $9x^2 - 18x + 9$ est un trinôme et **1** en est une racine évidente donc il admet une deuxième racine (éventuellement égale à la première).

En utilisant le produit des racines, $P = 1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{9}{9} = 1$ donc $x_2 = 1$. $S = \{1\}$.

d) $x^2 + 3x + 2 = 0$

$\boldsymbol{x^2 + 3x + 2}$ est un trinôme et $\boldsymbol{-1}$ en est une racine évidente donc il admet une deuxième racine (éventuellement égale à la première).

En utilisant le produit des racines, $P = -1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2$, donc $x_2 = -2$.

Ainsi l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $S = \{-2; -1\}$.

Ou méthode avec le discriminant : $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet 2 solutions réelles distinctes :

$x_1 = \frac{-3-\sqrt{1}}{2\times 1} = \frac{-3-1}{2} = -\frac{4}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-3+\sqrt{1}}{2\times 1} = \frac{-3+1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$ $S = \{-2; -1\}$.

Exercice 4

a) $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-10) = 9 + 40 = 49$.

$\Delta > 0$, donc $f(x)$ est factorisable et s'écrit $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-\sqrt{49}}{2\times 1} = \frac{3-7}{2} = -\frac{4}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+\sqrt{49}}{2\times 1} = \frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5$

Donc $f(x) = (x + 2)(x - 5)$.

b) $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times 7 = 1 - 84 = -83$. $\Delta < 0$, $g(x)$ ne se factorise pas**.**

c) $\Delta = 40^2 - 4 \times (-8) \times (-50) = 1600 - 1600 = 0$

$\Delta = 0$, donc $h(x)$ est factorisable et s'écrit $h(x) = a(x - x_0)^2$ avec $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-40}{2\times(-8)} = \frac{-40}{-16} = 2{,}5$.

Donc $h(x) = -8(x - 2{,}5)^2$

Exercice 5

<u>Méthode</u> : On calcule Δ, on cherche les racines éventuelles, on fait le tableau de signes et on lit les solutions de l'inéquation dans le tableau.

1) $\Delta = 9$; $x_1 = -2$ et $x_2 = 1$; signe de a « à l'extérieur des racines » ($a = 1$) ;
$s_1 =]-\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[$

2) $\Delta = -23$; le trinôme n'a pas de racine; il a le signe de a pour tout réel x.
$a = -3$, donc, pour tout x, $-3x^2 + x - 2 \leq 0$. $s_2 =]-\infty ; +\infty[$

3) Par factorisation (ou calcul de Δ) : $x_1 = 0$ et $x_2 = -\dfrac{3}{2}$;

signe de a « à l'extérieur des racines » ($a = 2$) ; $s_3 =]-\infty ; -\frac{3}{2}] \cup [0 ; +\infty[$

4) $2x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 2$. signe de a « à l'extérieur des racines » ($a = 2$) ;
$s_4 =]-2 ; 2[$

Problème 1

a) « L'entreprise vend toute sa production avec un prix à la tonne fixe. L'activité est à l'équilibre pour la production et la vente de 25 tonnes de pâte. »

Donc le prix de vente à la tonne est donné par :

$\frac{C(25)}{25} = \frac{25^2+632\times25+1075}{25} = \frac{625+15\,800+1\,075}{25} = \frac{17\,500}{25} = 700$. Le prix de vente à la tonne est 700 €.

b) Soit $B(q)$ l'expression du bénéfice en fonction de q, avec $q \in [0\,;60]$.

$B(q) = R(q) - C(q) = 700q - (q^2 + 632q + 1075) = 700q - q^2 - 632q - 1075$

$B(q) = -q^2 + 68q - 1075$

c) Répondre à cette question revient à résoudre l'inéquation $B(q) > 0$ c'est-à-dire $-q^2 + 68q - 1075 > 0$

$\Delta = 68^2 - 4 \times (-1) \times (-1075) = 324$, $\Delta > 0$ donc le trinôme admet deux racines réelles distinctes :

$q_1 = \frac{-68-\sqrt{324}}{2\times(-1)} = \frac{-68-18}{-2} = \frac{86}{2} = 43$ et $q_2 = \frac{-68+\sqrt{324}}{2\times(-1)} = \frac{-68+18}{-2} = \frac{50}{2} = 25$.

Un trinôme est du signe de a, à l'extérieur des racines.
B admet donc le tableau de signes suivant :

q	0		25		43		60
Signe de $B(q)$		−	**0**	+	**0**	−	

Ainsi, les solutions de l'inéquation $-q^2 + 68q - 1075 > 0$ sont : $S =]25\,;\,43[$

Pour que l'activité soit rentable, la production de pâte à papier doit donc être comprise entre 25 et 43 tonnes.

Exercices dérivation

Exercice 1

1) **a.** $f(-3) = -2$ et $f'(-3) = 9$.
b. $f(-2) = 2$ et $f'(-2) = 0$.
c. $f(-1) = 0$ et $f'(-1) = -3$.

2) L'équation réduite de la tangente T à C_f au point d'abscisse -3 est :
$y = f'(-3)\big(x - (-3)\big) + f(-3) \Leftrightarrow y = 9\,(x+3) - 2 \Leftrightarrow y = 9\,x + 27\ - 2 \Leftrightarrow y = 9\,x + 25$

L'équation réduite de la tangente T_1 à C_f au point d'abscisse -2 est :
$y = f'(-2)\big(x - (-2)\big) + f(-2) \Leftrightarrow y = 0\,(x+2) + 2 \Leftrightarrow y = 2$ [On trouve bien une droite horizontale]

L'équation réduite de la tangente T_2 à C_f au point d'abscisse -1 est :
$y = f'(-1)\big(x - (-1)\big) + f(-1) \Leftrightarrow y = -3\,(x+1) + 0 \Leftrightarrow y = -3x - 3$

3) Le nombre dérivé est négatif sur] –2 ; 0[(car *f* est décroissante sur cet intervalle)

4) Le nombre dérivé est positif sur $]-\infty\,;\,-2[$ et sur $]0;\,+\infty[$ (car *f* est croissante sur ces intervalles)

Exercice 2

1) $f'(x) = 6x$

2) $g'(x) = 4x^3 + 6x^2$

3) $h'(x) = -\frac{4}{x^5}$

4) $i'(x) = \frac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)^2}$

Exercice 3

On utilise le théorème du cours liant le signe de la dérivée et les variations de la fonction.
° C_1 est au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-0{,}5]$ et sur [0 ; 0,5] donc f_1 est positive sur ces intervalles ; d'autre part f_2 est croissante sur ces intervalles.
° C_1 est au-dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle [–0,5 ; 0] et sur $[0{,}5\,;\,+\infty[$ donc f_1 est négative sur ces intervalles ; d'autre part f_2 est décroissante sur ces intervalles.
On peut donc en conclure que C_2 représente *f* et C_1 représente *f* '.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x^2 - x$
1) $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$.
2) .
$\Delta = 16$ donc $\Delta > 0$ et il y a deux racines : $x_1 = -1$ et $x_2 = \dfrac{1}{3}$
Le trinôme $3x^2 + 2x - 1$ a le signe de a ($a = 3$) « à l'extérieur des racines ».

3)

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f		$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\frac{5}{27}$	$\nearrow$	

4) $f(2) = 2^3 + 2^2 - 2 = 8 + 4 - 2 = 10$ et $f'(2) = 3 \times 2^2 + 2 \times 2 - 1 = 12 + 4 - 1 = 15$

L'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse 2 est :

$y = f'(2)(x-2) + f(2) \Leftrightarrow y = 15\,(x-2) + 10 \Leftrightarrow y = 15x - 30 + 10 \Leftrightarrow y = 15x - 20$

Exercice 5

1) $f'(x) = \dfrac{3x-1}{2\sqrt{x}}$ ..... f est décroissante sur $]0\,;\frac{1}{3}]$ et croissante sur $[\frac{1}{3}\,;+\infty[$

2) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}$ ..... f est décroissante sur $[-1; 0[$ et sur $]0\,;1]$ et f est croissante sur $]-\infty; -1]$ et sur $[1\,;+\infty[$

3) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$ ..... f est croissante sur $]-\infty\,;0]$ et décroissante sur $[0\,;+\infty[$

Problème 2

1) $h'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) = 3(x-1)(x+1)$

2) et 3)

$h'(x)$ s'annule pour : $3(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = ou\ x + 1 = 0$

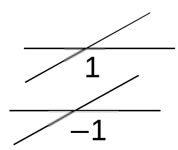
$\Leftrightarrow x = 1 \quad ou \quad x = -1$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de h		$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	

$m > 0$ donc

$m > 0$ donc



Pour tout $x \in [0; 1[$: $h(x) = f(x) - g(x) > 0$, donc $f(x) > g(x)$ et C_f est au-dessus de $\mathcal{D}$.

Pour tout $x \in]1; +\infty[$: $h(x) = f(x) - g(x) > 0$, donc $f(x) > g(x)$ et C_f est au-dessus de $\mathcal{D}$.

Pour $x = 1$: $h(1) = f(1) - g(1) = 0$, donc $f(1) = g(1)$ et C_f et $\mathcal{D}$ sont sécantes au point d'abscisse 1.

Exercices suites

Exercice 1 $u_5 = \frac{2\times5+1}{5+1} = \frac{11}{6}$

Exercice 2

1) $u_0 = (0+5)^2 + 2 = 27$ $u_1 = (1+5)^2 + 2 = 38$ $u_2 = (2+5)^2 + 2 = 51$

2) $u_{n+1} = \left((n+1)+5\right)^2 + 2 = (n+6)^2 + 2 = n^2 + 12n + 36 + 2 = n^2 + 12n + 38$

3) $u_{n+1} - u_n = n^2 + 12n + 38 - (n+5)^2 - 2 = n^2 + 12n + 38 - (n^2 + 10n + 25) - 2$
$u_{n+1} - u_n = n^2 + 12n + 38 - n^2 - 10n - 25 - 2 = 2n + 11$

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 2n + 11 \geq 11 > 0$

Ainsi, pour entier naturel n, $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.

Exercice 3

$u_1 = 2 \times u_0 - 4 = 2 \times 3 - 4 = 6 - 4 = 2$

$u_2 = 2 \times u_1 - 4 = 2 \times 2 - 4 = 4 - 4 = 0$

$u_3 = 2 \times u_2 - 4 = 2 \times 0 - 4 = -4$

Exercice 4

$u_1 = \frac{4}{3}$; $u_2 = \frac{7}{4}$; $u_3 = \frac{11}{7}$

Exercice 5

1) Pour tout $\in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr = 16 + 4n$.

2) $u_6 = 16 + 4 \times 6 = 16 + 24 = 40$.

Exercice 6

On calcule les trois premiers termes :
$u_0 = 0$ $u_1 = 1^2 + 4 \times 1 = 1 + 4 = 5$ $u_2 = 2^2 + 4 \times 2 = 4 + 8 = 12$
Calculons les différences :
$u_1 - u_0 = 5 - 0 = 5$ $u_2 - u_1 = 12 - 5 = 7$ donc $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$

Donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

Exercice 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 4(n+1) + 7 - (4n+7) = 4n + 4 + 7 - 4n - 7 = 4$

Donc la suite (u_n) est arithmétique de raison 4 et de premier terme $u_0 = 4 \times 0 + 7 = 7$.

Exercice 8

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_5 = 9$ et $u_{20} = 28$.
1) Pour tout $\in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

$u_5 = 9 \Leftrightarrow u_0 + 5r = 9 \Leftrightarrow u_0 = 9 - 5r$

$u_{20} = 28 \Leftrightarrow u_0 + 20r = 28 \Leftrightarrow u_0 = 28 - 20r$

Ainsi, $9 - 5r = 28 - 20r \Leftrightarrow -5r + 20r = 28 - 9 \Leftrightarrow 15r = 19 \Leftrightarrow r = \frac{19}{15}$

2) (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = \frac{19}{15} > 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

3) *Méthode 1* : Pour tout $\in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

$u_5 = 9 \Leftrightarrow u_0 + 5r = 9 \Leftrightarrow u_0 = 9 - 5r = 9 - 5 \times \frac{19}{15} = 9 - \frac{19}{3} = \frac{8}{3}$

Donc $u_{50} = \frac{8}{3} + 50 \times \frac{19}{15} = 66$.

Méthode 2 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$: $u_n = u_p + (n - p)r$

$u_{50} = u_5 + (50 - 5)\frac{19}{15} = 9 + 45 \times \frac{19}{15} = 66$

Exercice 9

1) Pour tout $\in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n = 2 \times 3^n$
2) $u_3 = u_0 q^3 = 2 \times 3^3 = 54$.

Exercice 10

Soit (u_n) une suite géométrique de raison positive telle que $u_0 = 7$ et $u_2 = 28$.
Déterminer la raison de cette suite, puis calculer u_5.
Pour tout $\in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n = 7 \times q^n$

$u_2 = 28 \Leftrightarrow 7 \times q^2 = 28 \Leftrightarrow q^2 = \frac{28}{7} = 4$

Comme q est positif on en déduit que $q = \sqrt{4} = 2$

$u_5 = 7 \times 2^5 = 224$

Exercice 11

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{2}{1} = 2$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ donc $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$. Ainsi, la suite (u_n) n'est pas géométrique.

Exercice 12

1) $v_2 = v_1 \times q = 480 \times \frac{1}{2} = 240$; $v_3 = 120$; $v_4 = 60$.

2) Pour tout entier naturel n, $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

3) $v_{n+1} - v_n = 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)-1} - 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n} - 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$= 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -240 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

or $-240 < 0$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > 0$ (car $\frac{1}{2} > 0$ et ses puissances aussi).

Donc, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n < 0$ et la suite est décroissante.

Problème 3

1) $v_1 = v_0 + 15 = 20 + 15 = 35$; $v_2 = v_1 + 15 = 35 + 15 = 50$; $v_3 = v_2 + 15 = 50 + 15 = 65$

2) v_{n+1} représente le nombre de Smartphones vendus le mois $n + 1$ de l'année 2016 or ce commercial arrive à vendre chaque mois 15 Smartphones de plus que le mois précédent. Donc : $v_{n+1} = v_n + 15$.
Ainsi, la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 15$ et de premier terme $v_0 = 20$.

3) La suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 15$ et de premier terme $v_0 = 20$ donc :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + nr$

$$\boxed{v_n = 20 + 15n}$$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n > 200 \iff 20 + 15n > 200 \iff 15n > 180 \iff n > \frac{180}{15} \iff n > 12$
Donc à partir du mois de janvier 2017 il vend plus de 200 Smartphones par mois.

Problème 4

a) $Q_1 = 4\,500 \times 1{,}03 =$ **4 635 €** et $Q_2 = 4\,635 \times 1{,}03 =$ **4 774,05 €**.

b) La suite (Q_n) est une **suite géométrique de raison q = 1,03 et de terme initial Q_0 = 4 500**.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n = Q_0 \times q^n$, donc $\mathbf{Q_n = 4\,500 \times 1{,}03^n}$.

d) On cherche le plus petit entier N tel que $4\,500 \times 1{,}03^N > 9\,000$. On trouve $N = 24$.
$2015 + 24 = 2039$ donc <u>le loyer dépassera le double du loyer initial en 2039</u>.

Exercices fonction exponentielle

Exercice 1

a) $e^x \times e^{3x-1} = e^{x+3x-1} = e^{4x-1}$
b) $\frac{e^{-x}}{e^{4-x}} = e^{-x-(4-x)} = e^{-x-4+x} = e^{-4}$
c) $(e^{5x})^3 = e^{5x\times 3} = e^{15x}$
d) $(e^x - 1)(e^x + 1) = (e^x)^2 - 1^2 = e^{2x} - 1$
e) $\frac{e^{-x}\times e^{9x}}{e^{3x}} = \frac{e^{-x+9x}}{e^{3x}} = \frac{e^{8x}}{e^{3x}} = e^{8x-3x} = e^{5x}$
f) $e^x \times e^{5x-2} \times e = e^{x+5x-2+1} = e^{6x-1}$
g) $\frac{e^{-x}}{e^{7-x}} \times e^x = e^{-x-(7-x)} \times e^x = e^{-x-7+x+x} = e^{-7+x}$
h) $\frac{e^{x+4}}{(e^{3x})^2} = \frac{e^{x+4}}{e^{6x}} = e^{x+4-6x} = e^{-5x+4}$

Exercice 2

a) (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = e^{-7n}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = e^{-7n}$. donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = e^{-7}$ et de premier terme $u_0 = e^{-7\times 0} = e^0 = 1$.

b) (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{e^{-2n}\times e^{7n}}{e^{3n}}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{e^{-2n}\times e^{7n}}{e^{3n}} = \frac{e^{-2n+7n}}{e^{3n}} = \frac{e^{5n}}{e^{3n}} = e^{5n-3n} = e^{2n}$, donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = e^2$ et de premier terme $v_0 = e^{2\times 0} = e^0 = 1$.

c) (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = (e^{-4n})^{-2}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n = (e^{-4n})^{-2} = e^{-4n\times(-2)} = e^{8n}$, donc la suite (w_n) est géométrique de raison $q = e^8$ et de premier terme $w_0 = e^{8\times 0} = e^0 = 1$.

Exercice 3

a) $e^{3x-7} = -2$ or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{3x-7} > 0$ donc $S = \emptyset$.
b) $(e^x)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow e^{2x} = e^0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ donc $S = \{0\}$.
c) $e^{-3x+8} = e^{-5} \Leftrightarrow -3x + 8 = -5 \Leftrightarrow -3x = -13 \Leftrightarrow x = \frac{13}{3}$ donc $S = \left\{\frac{13}{3}\right\}$.
d) $e^{x^2} - e = 0 \Leftrightarrow e^{x^2} = e \Leftrightarrow e^{x^2} = e^1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \ ou \ x = 1$ donc $S = \{-1; 1\}$.

Exercice 4

a) $e^x > e \Leftrightarrow e^x > e^1 \Leftrightarrow x > 1$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S =]1 ; +\infty[$.

b) $e^{-3x+1} \geqslant e^4 \Leftrightarrow -3x + 1 \geqslant 4$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$\Leftrightarrow -3x \geqslant 3$
$\Leftrightarrow x \leqslant -1$
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S =]-\infty ; -1]$.

c) $e^{7x-21} < 1 \Leftrightarrow e^{7x-21} < e^0 \Leftrightarrow 7x - 21 < 0$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$\Leftrightarrow 7x < 21 \Leftrightarrow x < 3$
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S =]-\infty ; 3[$.

d) $e^{-2x+5} - e^{8x-3} \leqslant 0 \Leftrightarrow e^{-2x+5} \leqslant e^{8x-3} \Leftrightarrow -2x + 5 \leqslant 8x - 3$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow -2x - 8x \leqslant -5 - 3 \Leftrightarrow -10x \leqslant -8 \Leftrightarrow x \geqslant 0{,}8$ car on divise par -10 négatif ce qui renverse l'ordre

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S = [0{,}8\,;+\infty[$

e) $e^x \leqslant 0$ or pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e^x > 0$ donc $S = \emptyset$.

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction.

a) $f : x \mapsto e^{4x+1} - 4x + 7$
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et $f'(x) = 4\,e^{4x+1} - 4 = 4(e^{4x+1} - 1)$, pour tout réel x.

On obtient le signe de $f'(x)$ en résolvant l'inéquation $4(e^{4x+1} - 1) \geqslant 0$.

$4(e^{4x+1} - 1) \geqslant 0 \Leftrightarrow e^{4x+1} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^{4x+1} \geqslant 1 \Leftrightarrow e^{4x+1} \geqslant e^0 \Leftrightarrow 4x + 1 \geqslant 0$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow x \geqslant \frac{-1}{4}$

Ainsi on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{4}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		↘	9	↗	

$f\left(\frac{-1}{4}\right) = e^{4\times\frac{-1}{4}+1} - 4 \times \left(\frac{-1}{4}\right) + 7 = 1 + 1 + 7 = 9$

b) $g : x \mapsto xe^{5x}$
g est de la forme $u \times v$ avec, pour tout réel x, $u(x) = x$ et $v(x) = e^{5x}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $u(x) = x$ et $v(x) = e^{5x}$

Donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 5e^{5x}$

Et $g'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) = 1 \times e^{5x} + 5e^{5x} \times x = (5x + 1\,)e^{5x}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{5x} > 0$ donc $g'(x)$ est du même signe que $5x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

Or $5x + 1 > 0 \Leftrightarrow 5x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{5}$.

Ainsi, on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{5}$		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g		↘	$-\frac{1}{5}e^{-1}$	↗	

$g\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{5}e^{5\times\left(-\frac{1}{5}\right)} = -\frac{1}{5}e^{-1}$

c) $h : x \mapsto \frac{1}{e^x+1}$

La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. (car $e^x > 0$ pour tout x réels)

h est de la forme $\frac{1}{v}$ avec, pour tout réel x, $v(x) = e^x + 1$ et $v'(x) = e^x$

Et $h'(x) = -\frac{v'(x)}{\left(v(x)\right)^2} = -\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-e^x < 0$ et $(e^x + 1)^2 > 0$ donc $h'(x)$ est strictement négative sur $\mathbb{R}$, et la fonction h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

d) $k : x \mapsto \frac{e^x+1}{e^x+3}$

k est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

k est de la forme $\frac{u}{v}$ avec, pour tout réel x, $u(x) = e^x + 1$ et $v(x) = e^x + 3$

$u'(x) = e^x$ et $v'(x) = e^x$

Et $k'(x) = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{e^x \times (e^x+3) - (e^x+1) \times e^x}{(e^x+3)^2} = \frac{(e^x+3-e^x-1) \times e^x}{(e^x+3)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+3)^2}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2e^x > 0$ et $(e^x + 3)^2 > 0$ ainsi $k'(x)$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc la fonction k est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercices probabilités

Exercice 1

1) X est la variable aléatoire qui donne le gain algébrique de l'acheteur d'un billet.
Cette variable aléatoire prend les valeurs :
-2 ; 48 ; 198 et $1\,198$.
La loi de probabilité de la variable aléatoire X est :

x_i en €	-2	48	198	1 198
$p(X = x_i)$	$\frac{1985}{2000}$	$\frac{10}{2000}$	$\frac{4}{2000}$	$\frac{1}{2000}$

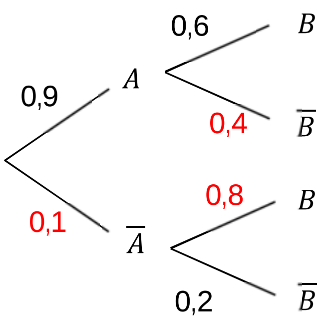
2) $E(X) = \frac{1985}{2000} \times (-2) + \frac{10}{2000} \times 48 + \frac{4}{2000} \times 198 + \frac{1}{2000} \times 1198 = -\frac{3}{4}$
Le gain moyen que peut espérer un joueur est de $-0{,}75$ €.

L'espérance est négative donc le jeu n'est pas favorable au joueur.

3) Soit x la somme rapportée par le gros lot. Le jeu est équitable lorsque $E(X) = 0$
c'est-à-dire $\frac{1985}{2000} \times (-2) + \frac{10}{2000} \times 48 + \frac{4}{2000} \times 198 + \frac{1}{2000} \times (x - 2) = 0$
c'est-à-dire $-\frac{2698}{2000} + \frac{1}{2000} \times (x - 2) = 0$
c'est-à-dire $x = \frac{2698}{2000} \times 2000 + 2 = 2700$

Ainsi, le plus gros lot doit rapporter 2 700 € pour que le jeu soit équitable.

Exercice 2



1) $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}9 \times 0{,}6 = 0{,}54$

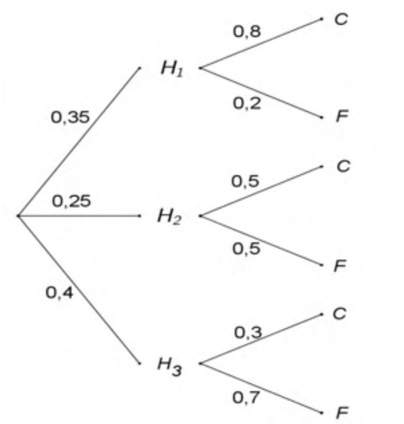
2) A et $\overline{A}$ constitue une partition de l'univers Ω,
donc d'après la formule des probabilités totales on a :
$P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap \overline{A}) = 0{,}54 + 0{,}1 \times 0{,}8 = 0{,}54 + 0{,}08 = 0{,}62$

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}9 + 0{,}62 - 0{,}54 = 0{,}98$

4) $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}54}{0{,}62} \approx 0{,}87$

Exercice 3

a. Voilà **l'arbre pondéré** traduisant la situation de l'exercice :



b. $P(C \cap H_3) = P(H_3) \times P_{H_3}(C) = 0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}12$.
La probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3 est de **0,12**.

c. H_1 , H_2 et H_3 constituent une partition de l'univers Ω,
donc d'après la formule des probabilités totales on a :
$P(C) = P(H_1 \cap C) + P(H_2 \cap C) + P(H_3 \cap C) = 0{,}35 \times 0{,}8 + 0{,}25 \times 0{,}5 + 0{,}12 = 0{,}525$.
La probabilité de l'événement C est donc bien égale à **0,525**.

d. On cherche $P_C(H_1)$.
$P_C(H_1) = \frac{P(H_1 \cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}35 \times 0{,}8}{0{,}525} \approx 0.533$
Sachant que l'arbre choisi est un conifère, la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 est donc environ égale à **0,533**.